

FACULTE DES SCIENCES ET DE GENIE

PHENOMENES CRITIQUES
ET GEOMETRIE FRACTALE

ROBIN CÔTÉ

Mémoire
présenté
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

ECOLE DES GRADUES
UNIVERSITE LAVAL

AOUT 1989

©Droits réservés de Robin Côté 1989



FACULTE DES SCIENCES ET DE GENIE

PHENOMENES CRITIQUES
ET GEOMETRIE FRACTALE

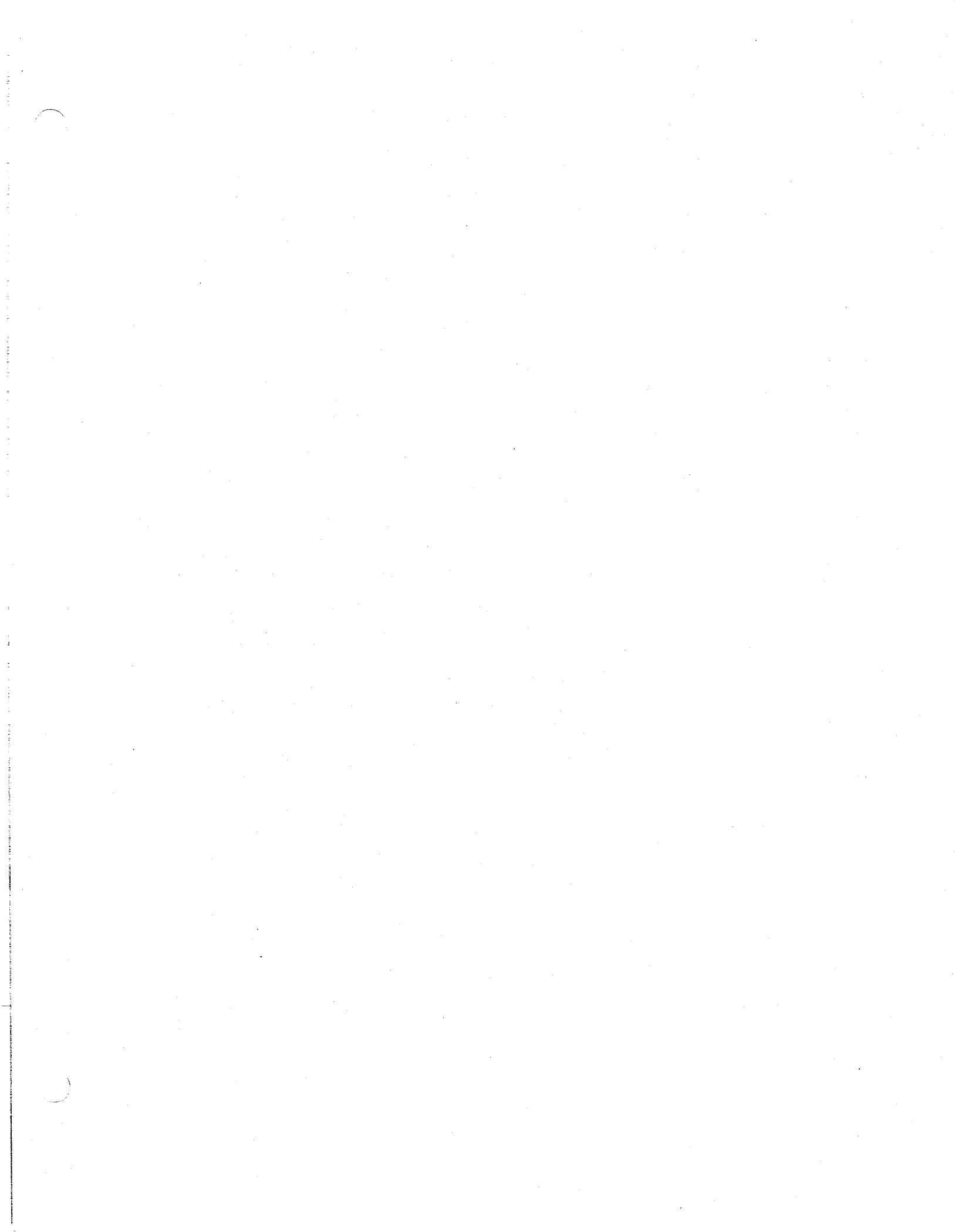
ROBIN CÔTÉ

Mémoire
présenté
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

ECOLE DES GRADUES
UNIVERSITE LAVAL

AOUT 1989


©Droits réservés de Robin Côté 1989



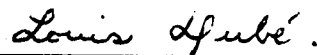
Résumé

Nous développons ici un formalisme qui relie la théorie du groupe de renormalisation (GR) appliquée aux phénomènes critiques, et la géométrie fractale. Le GR est une méthode itérative qui permet de décrire le comportement de la matière près des régions de transition de phases (phénomènes critiques). Il est possible d'établir un lien entre les équations du GR et la géométrie fractale par le biais de la théorie de l'itération des fonctions rationnelles. En effet, pour certains modèles dits hiérarchiques, les transformations de renormalisation (TGR) obtenues sont exactes et donnent des fonctions rationnelles.

Ce lien rend alors possible l'étude de la distribution des zéros de la fonction de partition de certains modèles (Ising, Potts, etc.). L'explication des transitions de phases (théorie de Yang-Lee) repose sur cette distribution.



Robin Côté



Louis J. Dubé

Remerciements

La réalisation de ce travail n'aurait pas été possible sans le concours attentionné d'une multitude de personnes. A celles-ci, j'offre ces quelques lignes.

Je remercie tout particulièrement mon directeur de recherche, le Professeur Louis J. Dubé, pour m'avoir suggéré ce thème et prodigué suggestions et conseils. La réussite de cette maîtrise est due en majeure partie à ses nombreux encouragements et à son dynamisme débordant. Celui que l'on surnommait "Herr Direktor", en plus de m'avoir fait progresser dans le monde de la recherche, est le principal responsable de ma remise en forme physique ; avec lui, le proverbe *un esprit sain dans un corps sain* prend toute sa signification.

Mes remerciements les plus chaleureux vont à ma famille ; mon père Fernand, ma mère Aline, ainsi que mes nombreux frères et soeurs, *i.e.* Lise, Monic, Jean, Marie, Christine, Pierre, Hélène et Michel. Sans leur support moral lors des retours aux sources, ce travail aurait été de beaucoup plus ardu.

Mon remerciement le plus tendre va à Hélène Marinier qui m'a "enduré" avec tant de compréhension. Je suis également reconnaissant à toute sa famille ; Bernard et Jacqueline, et leurs enfants : Anne, Jean-Jacques, Rachelle et Paul. A Guy Bernard aussi, un merci tout spécial.

Je tiens à remercier tout particulièrement deux personnes qui m'ont aidé et grandement influencé au cours de mes études. D'abord, il s'agit de l'ami qui fut à mes côtés depuis près de dix ans : Daniel Proulx. Sans lui, les études auraient été d'un calme plat ; en plus de mettre de l'ambiance dans les cours, "Proulx" fut la principale cause de l'augmentation dangereuse de mes dépenses allouées aux sorties. Plusieurs bars nous doivent leur rentabilité. La deuxième personne dont je tiens à souligner l'importance dans mon cheminement est le Professeur Jacques Dionne (dit "Zidore") de l'Université du Québec à Rimouski (UQAR). Le "bourreau", armé de son stylo rouge, m'a appris,

par ses nombreuses "corrections", à attaquer les problèmes de front et à les résoudre efficacement, et le tout présenté dans un bel emballage. Le bourreau est maintenant un ami à qui je dois un grande part de ma formation.

Je ne peux passer sous silence le support moral que plusieurs personnes m'ont donné. Il y a les copains de sortie du jeudi soir et des pauses-café interminables : Daniel Proulx, mon co-équipier de bureau et ami Claude-André Laberge, Michel Morin (dit Mike the maléfique), Marie-Claude Gagné (Marie-Chaude), Stéphane Laperrière (le requin), Nadia Capolla, Jean Couture, Alain Chandonnet. A ceux-ci s'ajoutent les amis théoriciens : Michel Gagnon (dit Grognon), Marc De Montigny, André Leclair, Dominique Bérubé. Il y a aussi le "groupe des astreux" : Pierre Martin, Steve Lesvesque, Edouard Boily, Christian Couture, et tous les autres. Un merci tout spécial va aux membres "du groupe", notamment Martin d'Anjou (l'esclave) et René-Jean Essiambre. Enfin, je remercie tous ceux que j'ai omis de mentionner (les membres des équipes de volleyball et de balle molle) : la liste serait encore très longue.

Enfin, je tiens à remercier le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) pour la bourse m'ayant permis de réaliser mon projet.

Table des matières

Résumé	
Remerciements	i
Table des matières	iii
Liste des tableaux	vii
Liste des figures	viii
Introduction	1
1 Description qualitative des phénomènes critiques	3
1.1 Définitions et notations	3
1.2 Les modèles	6
1.2.1 Modèle de Heisenberg pour le magnétisme	6
1.2.2 Modèles simplifiés	8
1.3 Comportement expérimental et description qualitative	10
1.3.1 Comportement expérimental	10
1.3.2 Description qualitative	13
2 Transition de phase et physique statistique	17

2.1	Définitions et concepts de base	17
2.2	Théorie de Yang-Lee	19
2.3	Distribution des zéros	25
2.3.1	Modèle d'Ising	25
2.3.2	Théorèmes de Yang-Lee généralisés	31
3	Groupe de renormalisation	33
3.1	Lois d'échelle	33
3.1.1	Fonctions homogènes	33
3.1.2	Lois d'échelle	34
3.2	Groupe de renormalisation (GR)	37
3.2.1	Approche qualitative et idées de base	37
3.2.2	Enoncé formel	39
3.2.3	Calcul des exposants critiques	41
3.3	Applications	48
3.3.1	Décimation	49
3.3.2	Méthode de Migdal-Kadanoff	55
3.3.3	Autres méthodes	58
4	Réseaux hiérarchiques	59
4.1	Construction et propriétés thermodynamiques	59
4.1.1	Exemples de réseaux hiérarchiques	59
4.1.2	Topologie des réseaux hiérarchiques	61
4.1.3	Propriétés thermodynamiques	63
4.2	Exemple complet du calcul d'une TGR sur un réseau hiérarchique	68
4.2.1	Définitions et fonction de partition	68

4.2.2	Transformations de renormalisation	71
4.3	TGR connues pour certains réseaux	73
4.3.1	Modèle d'Ising	73
4.3.2	Modèle de Potts	74
5	Théorie de l'itération des fonctions rationnelles sur la sphère de Riemann	77
5.1	Définitions et notations	78
5.1.1	Éléments de systèmes dynamiques	79
5.1.2	Éléments d'analyse complexe	81
5.1.3	Définition des ensembles de Julia et de Fatou	83
5.2	Propriétés des différents ensembles	86
5.2.1	Ensemble de Julia	86
5.2.2	Ensemble de Mandelbrot	90
5.3	Production graphique des différents ensembles	94
5.3.1	Ensembles de Julia et de Fatou	94
5.3.2	Ensemble de Mandelbrot	101
6	Synthèse et résultats	102
6.1	Lien formel	102
6.2	Information contenue dans les différents ensembles	106
6.2.1	Ensembles de Julia	106
6.2.2	Ensembles de Fatou	113
6.2.3	Ensembles de type Mandelbrot	119
6.3	Résultats	122
6.3.1	Réseau en diamant généralisé	122

6.3.2 Réseau en collier généralisé	127
6.3.3 Angle d'approche θ	127
Conclusion	130
Appendice A : Théorèmes de Yang-Lee généralisés	133
Appendice B : Calcul de la TGR pour un réseau non-uniforme	136
Appendice C : Figures de Julia et de Fatou	141
Bibliographie	155

Liste des tableaux

1.1	Liste de quelques phénomènes critiques [Ma ; 1982]	5
1.2	Exposants critiques et correspondance entre les systèmes ferromagnétique et liquide-gaz [Ma ; 1982]	14
1.3	Valeurs expérimentales de certains exposants critiques [Ma ; 1982]	15
6.1	Valeurs critiques pour le modèle d'Ising ($q = 2$) sur un réseau en diamant ($B = 4, b = d = 2$)	112
6.2	Résultats publiés pour les réseaux en diamant	123
6.3	Points d'accumulation mesurés sur les graphiques	124
6.4	Résultats calculés à partir des données du tableau 6.3	125
6.5	Résultats publiés pour le réseau en collier	127
6.6	Points d'accumulation mesurés	128
6.7	Résultats calculés à partir des données du tableau 6.6	128
6.8	Angle d'analyticité	129

Liste des figures

1.1	Diagramme de phase (a) système liquide-gaz [Le Bellac ; 1988] ; (b) système ferromagnétique (\mathcal{M} : intensité du champ magnétique extérieur) [Reichl ; 1987]	4
1.2	Exemples de composantes de spin du modèle de Potts [Wu ; 1982]	9
1.3	Comportement critique (a) M_0 en fonction de T ; (b) M en fonction de H [Reichl ; 1987]	11
1.4	Relation entre la température réduite et la densité réduite pour différentes substances [Reichl ; 1987]	13
2.1	Distribution des zéros pour un système fini ($z \equiv y$) [Pathria ; 1986]	23
2.2	Cas où il y a une transition de phase ($z \equiv y$) [Pathria ; 1986]	24
2.3	(a) Chaîne d'Ising avec conditions aux frontières cycliques ; (b) distribution des zéros pour le modèle d'Ising en une dimension [Pathria ; 1986]	25
2.4	La fonction de distribution $g(\theta)$ en fonction du paramètre η [Pathria ; 1986]	28
2.5	Distribution des zéros du modèle d'Ising en deux dimensions ; (a) réseau carré isotrope ; (b) réseau carré anisotrope [van Saarloos et Kurtze ; 1984]	30
3.1	Réduction d'un réseau carré en 2-D [Le Bellac ; 1988]	38
3.2	Evolution d'une TGR ; (i) $P \in S_\infty$: P' , transformé de P , appartient aussi à S_∞ , (ii) $Q \notin S_\infty$: Q', Q'', \dots , s'éloignent de S_∞ [Le Bellac ; 1988]	43
3.3	Flot de renormalisation (a) pour deux champs d'échelle : u_1 (essentiel) et u_2 (inessentiel) [Reichl ; 1987] ; (b) pour trois champs [Le Bellac ; 1988]	46

3.4	Décimation en une dimension. (a) montre le réseau initial ; (b) la sommation ; et (c) le réseau résultant [Kadanoff ; 1976]	50
3.5	Réseau de plaquettes : (a) différentes plaquettes se touchant ; (b) une plaquette particulière ($\mathbf{r}' = \mathbf{1}$)	54
3.6	Méthode de Migdal-Kadanoff : (a) réseau initial ; (b) déplacement des liens- y ; (c) décimation dans la direction des x ; (d) déplacement des liens- x ; (e) décimation dans la direction des y [Hu ; 1982]	56
4.1	Construction d'un réseau hiérarchique en diamant	60
4.2	Exemples de réseaux hiérarchiques [Griffiths et Kaufman ; 1982]	61
4.3	Exemple d'un réseau hiérarchique non-uniforme [Griffiths et Kaufman ; 1982]	62
4.4	Modèle d'Ising sur un réseau en diamant	64
4.5	Les trois premières étapes du réseau	68
4.6	Les différentes variables de deux itérations	69
4.7	Réseau de "Wheatstone"	74
4.8	Réseaux généralisés pour $p = 3$ et $s = 4$: (a) en diamant ; (b) en collier [Ottavi et Albinet ; 1987]	76
5.1	La sphère de Riemann [Devaney ; 1987]	78
5.2	Ensembles de Julia typiques pour $z \mapsto z^2 + c$. Les trois premiers sont des ensembles connexes séparant plusieurs bassins d'attraction, le quatrième et le dernier sont des ensembles de Cantor, et le cinquième est une dendrite [Peitgen et Richter ; 1986]	89
5.3	Ensemble de Mandelbrot : (a) ses coordonnées [Peitgen et Richter ; 1986] ; (b) ensembles de Julia correspondant [Barnsley ; 1988]	92
5.4	Ensemble de Julia fictif	96
5.5	Résultats par itération inverse pour 30 000 points : (a) MII ; (b) MIIM	97
5.6	J_R pour $R(z) = z^2 - 0,12 + 0,74i$ [Saupe ; 1987]	99

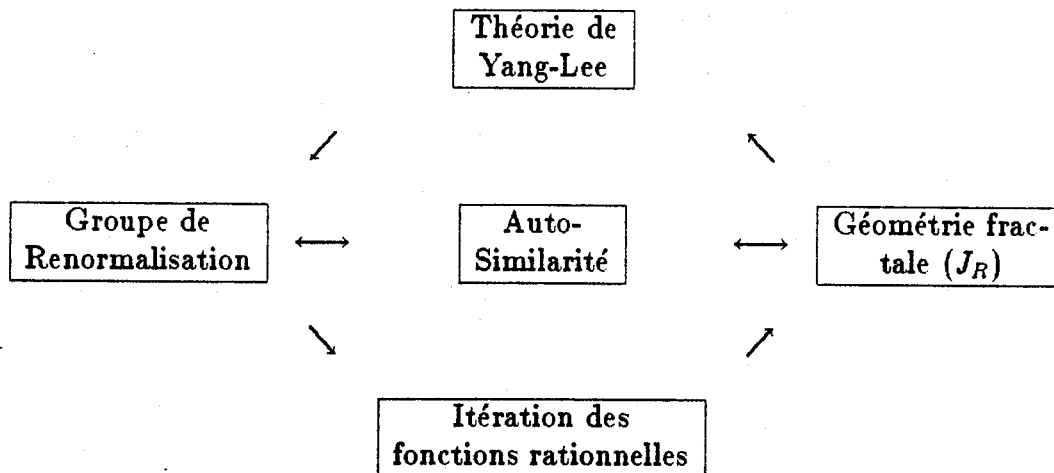
6.1	Liens entre les différentes théories étudiées	105
6.2	Ensemble de Julia pour le modèle sur réseau en diamant : (a) l'ensemble au complet ; (b) zoom du point de Néel ; (c) zoom du point de Curie . .	110
6.3	Dynamique de F_R : rouge $\Rightarrow R^n(z) \rightarrow \infty$ et vert $\Rightarrow R^n(z) \rightarrow 1$ pour $n \rightarrow \infty$	114
6.4	La physique sur l'axe réel : il y a deux phases et deux points critiques. Ils correspondent l'un à l'autre par $z_F = 1/z_A$	115
6.5	Flot de renormalisation : (a) $z \in \mathfrak{R}$ tiré de F_R ; (b) $K \in \mathfrak{R}$ correspondant ; (c) flot de renormalisation	118
6.6	Les trois ensembles de type Mandelbrot : (a) l'ensemble au complet, avec A_1 (bleu), A_2 (rouge) et M (noir) ; (b) zoom d'une partie de M ; (c) zoom d'une partie de (b). Ces zooms montrent le <i>chaos</i> près de la frontière de M	120
6.7	Comportement des points d'accumulation sous itération : (a) pour R_1 avec $s = p = 2$ et $q = 1$; (b) pour R_1 avec $s = p = q = 2$ et R_4 et R_5 . .	126
B.1	Réseau non-uniforme de Wheatstone (a) lien non-barré (b) lien barré . .	136
C.1	Ensembles de Julia pour le modèle en diamant ($p = s = 2$), avec différentes valeurs du paramètre q : $b = d = 2$	142
C.2	Ensembles de Julia pour le modèle en diamant ($p = s = 2$), avec différentes valeurs du paramètre q : (c) et (d) sont des zooms des régions de (b) où se trouvent les points d'accumulation	143
C.3	Ensembles de Julia pour le modèle en diamant ($p = s = 2$), avec $q = 1$: (b) et (c) sont des zooms de (a) alors que (d) est un zoom de (c)	144
C.4	Ensembles de Julia pour le modèle en diamant avec $q = 2$: (a) R_2 ; (b) R_3 ; (c) R_4 ; (d) R_5 . Les Figures (b) et (c) ont $d = 2$, alors que $d = 1,63$ pour (a) et $d = 3$ pour (d)	145
C.5	Ensembles de Julia pour le modèle en collier ($p = s = 2$), avec différentes valeurs du paramètre q . Ici $b = d = 2$	146

C.6	Ensemble de Julia pour le modèle en collier ($p = s = 2$), avec $q = 100$. Ici $b = d = 2$	147
C.7	Ensembles de Fatou pour le modèle en diamant ($p = s = 2$), avec différentes valeurs du paramètre $q : b = d = 2$	148
C.8	Ensembles de Fatou pour le modèle en diamant avec $q = 2$: (a) R_2 ; (b) R_3 ; (c) R_4 ; (d) R_5	149
C.9	Ensembles de Fatou pour le modèle en collier ($p = s = 2$), avec différentes valeurs du paramètre q	150
C.10	(a) Ensemble de Fatou pour le modèle en collier ($p = s = 2$), avec $q =$ 100 ; (b) ensembles de type Mandelbrot pour R_1 du réseau en diamant.	151

Introduction

Comme l'indique le titre du mémoire, ce travail traite de deux sujets qui semblent à première vue très éloignés, à savoir les phénomènes critiques d'une part, et la géométrie fractale d'autre part.

Le but de cet exposé est donc d'établir le lien entre ces deux sujets. Ce lien sera mis en évidence pour un type de réseaux particuliers : les réseaux hiérarchiques. En effet, on se limitera ici à ces réseaux, les réseaux réels (de Bravais) se situant à un niveau de difficulté supérieur. Le schéma ci-bas illustre les différents liens que nous établirons pour atteindre notre objectif.



La théorie de Yang-Lee explique l'apparition des transitions de phase (phénomènes critiques) pour des systèmes physiques à la limite thermodynamique. Elle repose sur

l'étude de la distribution des zéros de la fonction de partition du système. Pour sa part, le groupe de renormalisation (GR) est une méthode itérative qui permet de décrire le comportement singulier de la matière près des régions de transition ; elle ne fait aucunement référence aux zéros de la fonction de partition ni à la théorie de Yang-Lee. En effet, comme on le verra, elle est basée sur l'étude des points fixes d'une transformation du groupe de renormalisation (TGR) elle-même fonction du type de modèle étudié. Or, lorsque l'on appliquera le GR aux réseaux hiérarchiques, les TGR obtenues seront des fonctions rationnelles. Ceci nous amènera donc à l'étude de la théorie des fonctions rationnelles. A son tour, cette théorie, lorsqu'appliquée dans un espace complexe, nous conduira à la géométrie fractale. En effet, comme on le verra, l'ensemble des points fixes répulsifs (et leurs préimages) que l'on nomme ensemble de Julia J_R , possède une morphologie fractale.

Ces liens entre le GR, l'itération des fonctions rationnelles et la géométrie fractale illustrent une propriété commune : l'autosimilarité. En effet, le GR repose sur cette propriété (appelée aussi invariance d'échelle), alors que la géométrie fractale est génératrice d'objets autosimilaires. Le GR représente l'aspect analytique du problème, alors que la géométrie fractale illustre l'aspect géométrique du même problème.

Le dernier lien à établir pour fermer la boucle est de relier la théorie de Yang-Lee à la géométrie fractale et au GR. Pour les réseaux hiérarchiques, on montrera que l'ensemble des points fixes répulsifs J_R n'est autre que la distribution des zéros de la fonction de partition à la limite thermodynamique. On aura alors reliés phénomènes critiques et la géométrie fractale de manière formelle, à partir de plusieurs outils différents.

Afin de mener à bien notre travail, l'étude de plusieurs théories est requise. Ainsi, dans un premier temps, nous ferons un survol rapide du champ d'étude des transitions de phase et des phénomènes critiques (chapitre 1) ; ceci nous permettra d'introduire les définitions et concepts de base nécessaires à cette étude. Au chapitre 2, nous verrons la théorie de Yang-Lee expliquant l'apparition de changements de phase. Pour sa part, le GR sera expliqué au chapitre 3 avec quelques exemples d'application. Le chapitre 4 décrira les réseaux hiérarchiques ainsi que leurs propriétés thermodynamiques, alors que la théorie de l'itération de fonctions rationnelles sera brièvement exposée au chapitre 5. Finalement, le chapitre 6 reliera ensembles tous les éléments décrits précédemment ; les résultats obtenus y seront aussi analysés. Pour conclure, on discutera des applications futures des méthodes et techniques développées au cours de ce travail.

Chapitre 1

Description qualitative des phénomènes critiques

Dans ce chapitre, on fera un survol rapide de ce vaste champ d'étude que sont les transitions de phase et les phénomènes critiques. Pour ce faire, plusieurs sections seront nécessaires. Ainsi, en §1.1, on donnera quelques définitions de base qui seront expliquées à l'aide d'exemples. §1.2 servira de tremplin pour la description des modèles utilisés en physique statistique. Enfin, §1.3 donnera le comportement expérimental des phénomènes critiques ainsi qu'une description qualitative de la physique en jeu dans ces phénomènes.

1.1 Définitions et notations

Dans la description des propriétés macroscopiques de la matière, l'utilisation de quantités spécifiques à un matériau telles que la densité de masse, la densité d'énergie, l'aimantation, etc., s'avère très utile. Ces quantités sont appelées *variables mécaniques*. Bien entendu, toutes les variables mécaniques ne sont pas aussi évidentes, telles les amplitudes quantiques d'un fluide de Bose, l'aimantation des antiferroaimants, ou encore les composantes de Fourier de la densité atomique d'un cristal [Ma ; 1982].

Il existe aussi des quantités indépendantes du matériau et qui caractérisent l'environnement, ou si l'on veut, le réservoir avec lequel la substance est en contact. Ce sont des *champs appliqués*. La pression, la température, le champ magnétique extérieur en sont de bons exemples. Dans la plupart des cas, la valeur des variables mécaniques est déterminée de manière unique lorsque les champs appliqués sont spécifiés.

Il existe cependant des cas où les variables mécaniques ont le choix entre plusieurs valeurs, pour certaines valeurs spéciales des champs appliqués. Lorsqu'un matériau possède ainsi plusieurs choix, on dit qu'il se trouve dans une région de *transition de phase*. Un exemple simple illustrant ce phénomène est le changement de phase de l'eau (H_2O); à la température $T = 373K$ et la pression $p = 1 \text{ atm}$, la densité ρ_{H_2O} n'est pas fixe, mais a le choix entre une valeur élevée (eau liquide) ou une valeur basse (vapeur). Ceci se produit pour tout point (T, p) sur la courbe de la figure 1.1(a). On remarquera l'existence de deux points particuliers sur cette courbe : le point tricritique et le *point critique*. Le premier est le point où les trois phases de l'eau sont possibles, et le second est le point où le choix entre les différentes valeurs de ρ se termine : la distinction entre les deux états (liquide-gaz) n'existe plus, de même que le choix entre deux valeurs de ρ_{H_2O} .

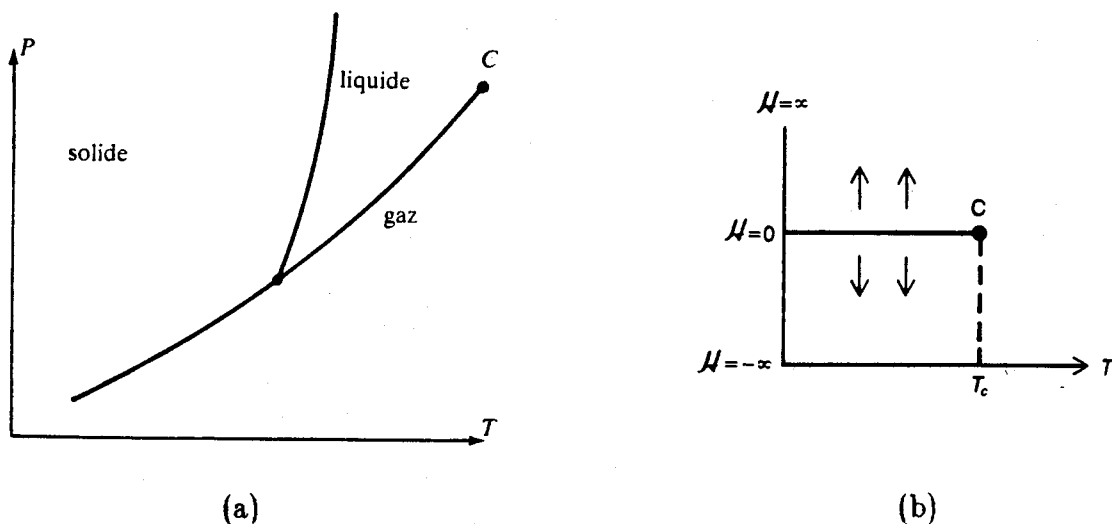


Figure 1.1: Diagramme de phase (a) système liquide-gaz [Le Bellac ; 1988] ; (b) système ferromagnétique (\mathcal{M} : intensité du champ magnétique extérieur) [Reichl ; 1987].

Afin de mieux visualiser ce dernier point, on peut étudier un autre système physique : le ferroaimant ou ferromagnétique. Dans de tels matériaux (fer, nickel, etc.), le vecteur d'aimantation \mathbf{m} n'a pas d'orientation privilégiée lorsque le champ magnétique extérieur \mathbf{H} est nul, de sorte que l'aimantation totale M est aussi nulle (cet exemple sera revu plus en profondeur en §1.3). Cependant, cette liberté de choix cesse lorsque la température est inférieure à une valeur critique T_c appelée la température de Curie. A ce moment,

m pointe dans une direction privilégiée et l'aimantation totale du système n'est plus nulle, mais augmente à mesure que la température diminue. La figure 1.1 illustre ce phénomène. On y voit bien que le point ($T_c, H = 0$) est un point critique tel que défini plus haut [Le Bellac ; 1988].

Les phénomènes observés près de ces points critiques sont qualifiés de *phénomènes critiques*. De même, les variables mécaniques qui deviennent indéterminées, comme la densité ρ dans le cas liquide-gaz ou encore l'aimantation M dans le cas ferromagnétique, sont aussi appelées des *paramètres d'ordre*¹.

Point critique	Paramètre d'ordre	Exemple	$T_c(K)$
Liquide-gaz	Densité	H_2O	647,05
Ferromagnétique	Aimantation	Fe	1044,0
Antiferromagnétique	Aimantation du sous-réseau	FeF_2	78,26
Ligne- λ	Amplitude de He_4	He_4	1,8-2,1
Supraconductibilité	Amplitude des paires d'électrons	Pb	7,19
Mélange de deux fluides	Concentration d'un fluide	$CCl_4 - C_7F_{14}$	301,78
Alliage binaire	Densité d'une espèce sur un sous-réseau	$Cu-Zn$	739
Ferroélectrique	Polarisation	Sulfate de triglycine	322,5

Tableau 1.1: Liste de quelques phénomènes critiques [Ma ; 1982].

¹Ce n'est pas la définition la plus précise : il peut exister plus d'une variable mécanique indéterminée. D'autres critères pourront être nécessaires pour sélectionner un paramètre d'ordre [Ma ; 1982].

Dans les deux cas précédents, les paramètres d'ordre sont des nombres réels. De façon générale, le paramètre d'ordre peut être un objet beaucoup plus compliqué tel un tenseur. On associe donc une *dimension* n au paramètre d'ordre. Dans les cas ci-hauts, $n = 1$ car le paramètre d'ordre est un nombre. Pour le modèle de Heisenberg par exemple, le paramètre d'ordre est un trivecteur (l'aimantation \mathbf{m}) de sorte que $n = 3$. Comme on le verra plus loin, le comportement critique dépend de la dimension n du paramètre d'ordre. Le tableau 1.1 donne une liste de phénomènes critiques ainsi que les paramètres d'ordre correspondants.

Avant de passer à la description des modèles utilisés en physique statistique pour étudier les transitions de phase et les phénomènes critiques, il convient de définir et de distinguer ces deux types de phénomènes physiques .

On appelle *transition de premier ordre* (ou de première espèce) une transition pour laquelle le paramètre d'ordre varie de façon discontinue, comme dans le cas de la transition liquide-gaz : la densité ρ subit un saut $|\rho_L - \rho_G|$. On note qu'il y a coexistence entre deux phases [Le Bellac ; 1988].

On appelle *transition de deuxième ordre* (ou de deuxième espèce) une transition dans laquelle le paramètre d'ordre s'annule de façon continue à $T = T_c$. Ceci signifie que dans le cas du système liquide-gaz, la quantité $|\rho_L - \rho_G| = 0$. Il n'y a plus coexistence de deux phases : une seule phase est possible. En finissant, on appelle *phénomènes critiques* les phénomènes se déroulant lors d'une transition du deuxième ordre ; dans la littérature, ces deux termes se confondent [Le Bellac ; 1988]. Après l'introduction des quantités thermodynamiques au chapitre 2, on donnera une définition plus précise de ces derniers points.

1.2 Les modèles

Dans cette section, une description de différents modèles utilisés en physique statistique sera donnée. Il est à noter qu'on ne s'attardera qu'aux modèles dits classiques.

1.2.1 Modèle de Heisenberg pour le magnétisme

L'hypothèse de base de ce modèle est [Fisher ; 1965] :

1. les spins des électrons sont bien localisés

Cette hypothèse suppose que les spins peuvent être localisés, dans une bonne approximation, sur un réseau d'ions magnétiques. Ainsi, on associe au site i (emplacement de l'atome i) un spin σ_i . Ayant accepté cette hypothèse, on peut écrire le hamiltonien du modèle de Heisenberg pour un système de N sites [Ashcroft et Mermin ; 1976] :

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N J_{ij} \sigma_i \cdot \sigma_j - g\mu_B \sum_{i=1}^N \sigma_i \cdot \mathbf{H} \quad (1.1)$$

où \mathbf{H} est le champ magnétique appliqué, σ_i l'opérateur de spin au site i , et $g\mu_B$ est le produit du facteur de Landé et du magnéton de Bohr. Le terme $1/2$ vient du fait que l'on compte deux fois les mêmes paires dans la double sommation. Aussi,

$$\begin{cases} J_{ij} = J(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) \\ J_{ij} = J_{ji} \end{cases} \quad (1.2)$$

est le terme d'échange d'énergie qui dépend de la distance entre les spins ; on l'appelle aussi la constante de couplage. Dépendamment du signe de J_{ij} , on aura différents systèmes physiques

$$\begin{cases} J_{ij} > 0 : \text{ferromagnétique} \\ J_{ij} < 0 : \text{antiferromagnétique} \end{cases} \quad (1.3)$$

Il est bon de noter que le hamiltonien (1.1) est celui du *modèle de Heisenberg quantique* : les spins σ sont des opérateurs. Si l'on considère des systèmes de spins $1/2$, les σ seront les matrices de Pauli [Toda, Kubo et Saito ; 1983].

Afin de simplifier le problème, on remplace les opérateurs σ par des spins classiques \mathbf{s} qui sont de simple trivecteurs. On obtient alors le *modèle classique de Heisenberg*. C'est sur ce dernier modèle que l'attention sera portée en majeure partie. On écrira plutôt (1.1) comme :

$$\mathcal{H}_{class.} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N J_{ij} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j - g\mu_B \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{H} \quad (1.4)$$

Deux hypothèses supplémentaires découlent du hamiltonien (1.4) [Fisher ; 1965] :

2. des interactions pairées, ce qui semble raisonnable en première approximation
3. une isotropie complète, *i.e.* que $\mathcal{H}_{class.}$ est complètement invariant par rotation

On peut simplifier davantage le modèle de Heisenberg. C'est ce que l'on s'efforcera de faire à la prochaine section.

1.2.2 Modèles simplifiés

Pour des systèmes de spins $1/2$, les vecteurs \mathbf{s}_i sont de longueur 1. Si l'on fixe la direction de \mathbf{H} suivant un axe particulier, l'axe z par exemple, le hamiltonien \mathcal{H} devient :

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j - g\mu_B H \sum_i s_i^z \quad (1.5)$$

Une simplification supplémentaire peut être apportée au modèle. En effet, $J_{ij}(\mathbf{r}_{ij})$ décroît rapidement à mesure que la distance entre les deux spins i et j augmente. De fait, seules les interactions entre les plus proches voisins peuvent être considérées en première approximation. Ceci se traduit, sur un réseau, comme $J_{ij} = 0$ si $j \neq i \pm 1$. Le hamiltonien s'écrit alors :

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j - g\mu_B H \sum_i s_i^z \quad (1.6)$$

où $\langle ij \rangle$ signifie une sommation sur les plus proches voisins [Fisher ; 1965].

A. Modèle d'Ising

Pour ce modèle, on suppose que deux des composantes de \mathbf{s}_i , s_i^x et s_i^y par exemple, sont négligeables devant la troisième, *i.e.* s_i^z . Ceci revient à dire que les spins sont orientés dans la direction z et ne peuvent prendre que les valeurs ± 1 :

$$\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \simeq s_i^z s_j^z, \quad \text{avec } s_i^z = \pm 1$$

On peut alors écrire $s_i = s_i^z$ sans ambiguïté, et \mathcal{H} devient simplement :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} s_i s_j - g\mu_B H \sum_i s_i \\ &\text{avec } s_i = s_i^z = \pm 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

On peut rendre ce modèle anisotrope en définissant différentes constantes de couplage pour les axes du réseau [Fisher ; 1965].

Comme on le verra, ce modèle est très important en physique statistique. En effet, si $H = 0$, il existe une solution exacte pour $d = 1, 2$. De plus, c'est essentiellement le même modèle que pour un gaz sur réseau ou encore un alliage binaire.

B. Modèle de Potts

Ce modèle est une généralisation du modèle d'Ising [Wu ; 1982]. Au lieu de n'avoir que deux valeurs possibles pour un spin s_i ($s_i = \pm 1$), il y en a q . On impose une

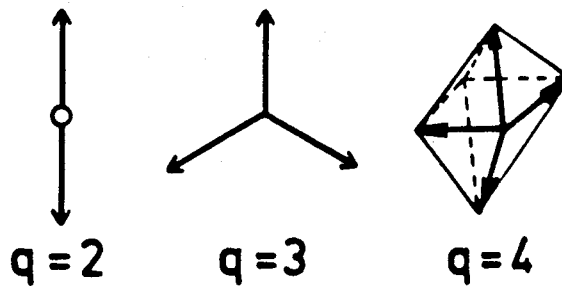


Figure 1.2: Exemples de composantes de spin du modèle de Potts [Wu ; 1982].

restriction à ces q composantes : elles doivent toutes avoir le même angle entre elles. La figure 1.2 illustre quelques cas. On remarque que $q = 2$ correspond au modèle d'Ising. En considérant que seuls les spins parallèles interagissent, on peut écrire

$$\mathcal{H}_{Potts} = -h \sum_i \delta(\sigma_i, 1) - \sum_{(ij)} K_{ij} \delta(\sigma_i, \sigma_j) - \sum_{(ijk)} L_{ijk} \delta(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k) + \dots \quad (1.8)$$

où

$$\delta(\sigma_i, \dots, \sigma_k) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \sigma_i = \dots = \sigma_k \\ 0 & , \text{ autrement} \end{cases}$$

Ici, h est un champ extérieur appliqué à l'état 1, K_{ij} est une constante de couplage entre deux spins, L_{ijk} est pour trois spins.

Si l'on ne prend que les interactions par paires (comme dans les modèles précédents), et qu'on ne considère que les interactions entre plus proches voisins, on aura :

$$\mathcal{H}_{Potts} = - \sum_{\langle ij \rangle} K_{ij} \delta(\sigma_i, \sigma_j) - h \sum_i \delta(\sigma_i, 1) \quad (1.9)$$

Le modèle est ferromagnétique (ou anti-ferromagnétique) si $K_{ij} > 0$ (ou $K_{ij} < 0$).

L'intérêt de ce modèle vient du fait qu'il couvre un large éventail de phénomènes, dépendamment de la valeur du paramètre q . Ainsi $q = 2$ représente le modèle d'Ising applicable surtout pour les substances magnétiques. Le cas $q = 3$ peut servir de modèle pour une solution de cinq liquides. Ou encore, $q = 4$ peut être utilisé pour l'étude de l'absorption de O_2 par une surface de nickel. Enfin, $0 \leq q \leq 1$ peut servir à modéliser les processus de vulcanisation dans les polymères branchés [Wu ; 1982].

Note Il existe bien d'autres modèles qui découlent du modèle de Heisenberg, tels les modèles XY [Ma ; 1982], sphérique (gaussien) ou S^4 [Reichl ; 1987]. Mais ils ne seront pas abordés dans ce travail.

1.3 Comportement expérimental et description qualitative

Dans cette section, les systèmes de spins seront principalement utilisés.

1.3.1 Comportement expérimental

On observe trois caractéristiques principales [Ma ; 1982].

A. Paramètre d'ordre

Comme on l'a déjà mentionné en §1.1, ce qui caractérise une transition est la valeur non-unique du paramètre d'ordre. Bien entendu, ce comportement n'a lieu que dans les cas où l'on peut identifier un tel paramètre. Pour l'exemple d'un ferromagnétique, l'aimantation M joue le rôle du paramètre d'ordre : pour $T < T_c$, $M \neq 0$ et varie avec T , pour $T > T_c$, $M = 0$.

B. Comportement singulier

Près des régions critiques, plusieurs quantités thermodynamiques ont des comportements singuliers, *i.e.* qu'ils obéissent à des lois de puissance. Pour illustrer ces comportements, l'exemple d'un système de spins est approprié [Hu ; 1982].

1. Aimantation

$$M = \left(\frac{\partial F}{\partial H} \right)_T \sim (T_c - T)^\beta, \text{ pour } T \sim T_c \quad (1.10)$$

où F est l'énergie libre de Gibbs (définie au chapitre 2). On définit

$$M_0 = \lim_{H \rightarrow 0} M(H, T)$$

le comportement de M_0 est illustré à la figure 1.3.

2. Aimantation versus H

On sait qu'il n'y a d'aimantation spontanée que pour $H = 0$. Pour $T = T_c$, on aura

$$M = \left(\frac{\partial F}{\partial H} \right)_T \sim H^{1/\delta} \quad (1.11)$$

La figure 1.3 représente le fait que $M \neq 0$ pour $H \neq 0$, à $T < T_c$.

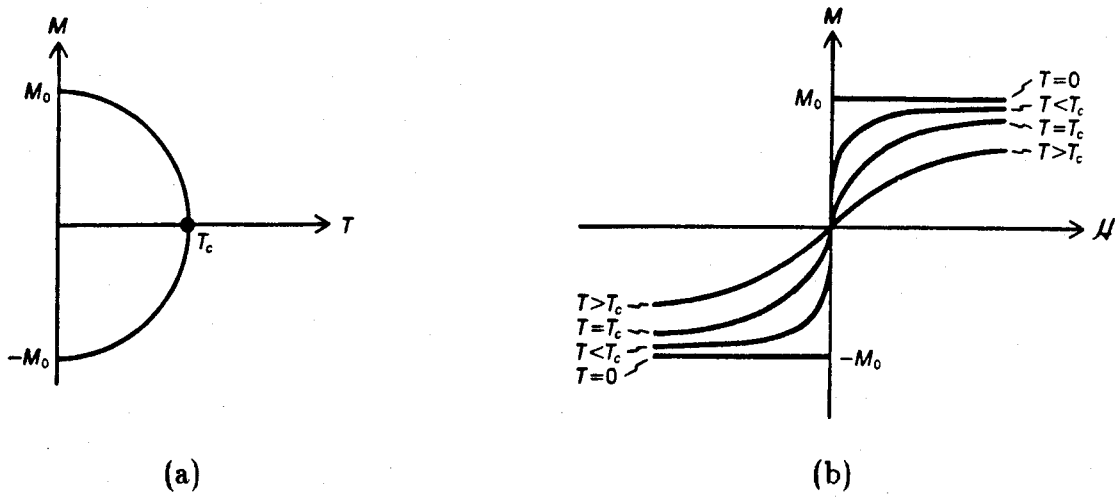


Figure 1.3: Comportement critique (a) M_0 en fonction de T ; (b) M en fonction de H [Reichl ; 1987].

3. Chaleur spécifique

$$C = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \sim \begin{cases} A_+(T - T_c)^{-\alpha} + B_+ & ; T > T_c \\ A_-(T_c - T)^{-\alpha'} + B_- & ; T < T_c \end{cases} \quad (1.12)$$

où A_{\pm} et B_{\pm} sont des constantes.

4. Susceptibilité

La susceptibilité χ_0 se comporte comme

$$\chi_0 = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_{T, H=0} \sim \begin{cases} C_+(T - T_c)^{-\gamma} & ; T > T_c \\ C_-(T_c - T)^{-\gamma'} & ; T < T_c \end{cases} \quad (1.13)$$

5. Fonction de corrélation

Cette fonction est une mesure de l'influence de l'orientation d'un spin situé en x_0 sur celle d'un spin situé en x . Les spins tendent à s'aligner (dans le cas ferromagnétique) ; cependant cette tendance est contrebalancée par l'agitation thermique. On s'attend donc à trouver une corrélation qui décroît avec la distance entre les spins :

$$\Gamma(x - x_0) \equiv \langle s(x_0)s(x) \rangle \sim |x - x_0|^{-(d-2+\eta)} \quad (1.14)$$

où d est la dimension de l'espace.

Cette expression est valide pour $a \ll |x - x_0| \ll \xi$, *i.e.* que la distance entre les deux spins est beaucoup plus grande que le pas du réseau a , mais aussi beaucoup plus petite que la longueur de corrélation ξ . Cette dernière est définie en 6.

6. Longueur de corrélation

On définit ξ à partir de $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) \sim e^{-|x|/\xi} \quad , \quad |x| \rightarrow \infty \quad (1.15)$$

Mathématiquement, le comportement de ξ est de la forme :

$$\xi \sim \begin{cases} f_+(T - T_c)^{-\nu} & ; \quad T > T_c \\ f_-(T_c - T)^{-\nu'} & ; \quad T < T_c \end{cases} \quad (1.16)$$

Notons que $\xi \rightarrow \infty$, à $T = T_c$.

Les différents exposants définis de 1 à 6 sont appelés *exposants critiques*. On peut les relier entre eux à l'aide de lois d'échelle, comme on le verra au chapitre 3 :

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \alpha' \quad , \quad \nu = \nu' \quad , \quad \gamma = \gamma' \\ \alpha = 2 - \nu d \quad , \quad \beta = \frac{\gamma}{\delta - 1} \quad , \quad \gamma = \nu(2 - \eta) \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad , \quad \delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

On remarque que seulement deux exposants sont indépendants [Reichl ; 1987].

C. Universalité des exposants critiques

On sait expérimentalement que beaucoup de systèmes physiquement très différents ont les mêmes comportements près des régions critiques. Comme le montre bien la figure 1.4, les systèmes liquide-gaz se comportent de la même façon, et ce pour des systèmes avec des interactions différentes : molécules monoatomiques (Ne, Ar, Kr, Xe), diatomiques (N_2 , O_2 , CO), ou polyatomiques (CH_4) [Reichl ; 1987].

L'universalité des exposants critiques est démontrée de manière beaucoup plus éclatante lorsque l'on regarde des phénomènes physiques qui n'ont rien de commun à prime abord. Par exemple, pour des ferromagnétiques, on observe :

$$M \sim A(T_c - T)^\beta \quad , \quad \text{où } A \text{ est une constante}$$

alors que pour les liquide-gaz, on a :

$$(\rho_L - \rho_G) \sim A'(T_c - T)^\beta \quad , \quad \text{où } A' \text{ est une constante.}$$

Il est intéressant de noter que les exposants β ont tous deux la même valeur : les deux systèmes ont le même comportement critique. Bien entendu, les autres exposants sont

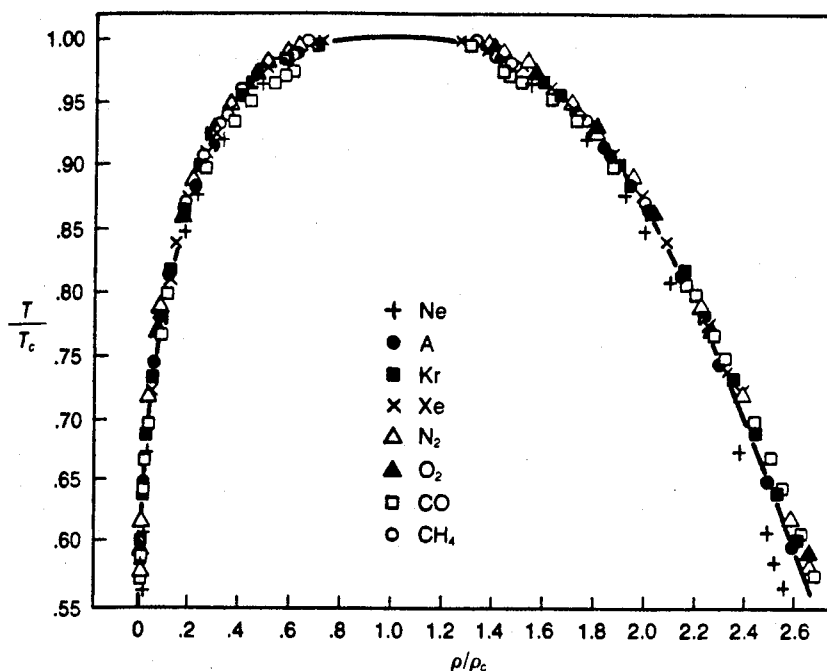


Figure 1.4: Relation entre la température réduite et la densité réduite pour différentes substances [Reichl ; 1987].

aussi égaux. Le tableau 1.2 donne la correspondance entre ces deux systèmes. Donc, les phénomènes critiques peuvent être séparés en différentes classes en fonction des exposants critiques. Ces exposants étant universels pour une classe donnée, *i.e.* qu'ils ont les mêmes valeurs, ils définissent les *classes d'universalité*.²

Expérimentalement, on remarque que les classes d'universalité dépendent des trois critères suivants [Hu ; 1982] :

1. la dimension d de l'espace
2. la dimension n du paramètre d'ordre
3. la symétrie des interactions dans le système

Le tableau 1.3 donne les valeurs expérimentales de certains exposants critiques.

1.3.2 Description qualitative

Afin de décrire ce qui se passe à la région critique, l'exemple de la transition ferro-magnétique-paramagnétique sera examiné. Les traits généraux de cette transition peu-

²Certains modèles ne suivent pas cette hypothèse d'universalité, comme le modèle à huit "vertexes" de Baxter [Toda, Kubo et Saito ; 1983]. Cependant, en général, cette hypothèse semble observée.

vent se transposer à toutes celles du deuxième ordre [Le Bellac ; 1988].

<u>ferromagnétique</u>	↔	<u>liquide-gaz</u>
aimantation : $M \sim A(T_c - T)^\beta$	↔	densité $(\rho_L - \rho_G) \sim A'(T_c - T)^\beta$
aimantation vs le champ magnétique H : $M \sim H^{1/\delta}$	↔	densité vs la pression p : $(\rho_L - \rho_G) \sim (p - p_c)^{1/\delta}$
susceptibilité : $\chi \sim \begin{matrix} C_+(T - T_c)^{-\gamma} \\ C_-(T_c - T)^{-\gamma} \end{matrix}$	↔	compressibilité : $K = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \sim \begin{matrix} C'_+(T - T_c)^{-\gamma} & , & T > T_c \\ C'_-(T_c - T)^{-\gamma} & , & T < T_c \end{matrix}$
		capacité calorifique à pression constante : $C_p \sim \begin{matrix} C''_+(T - T_c)^{-\gamma} & , & T > T_c \\ C''_-(T_c - T)^{-\gamma} & , & T < T_c \end{matrix}$
chaleur spécifique : $C \sim \begin{matrix} D_+(T - T_c)^{-\alpha} \\ D_-(T_c - T)^{-\alpha} \end{matrix}$	↔	capacité calorifique à volume constant : $C_v \sim \begin{matrix} D'_+(T - T_c)^{-\alpha} & , & T > T_c \\ D'_-(T_c - T)^{-\alpha} & , & T < T_c \end{matrix}$
diffusion de neutrons η et ν	↔	diffusion de la lumière η et ν

Tableau 1.2: Exposants critiques et correspondance entre les systèmes ferromagnétique et liquide-gaz [Ma ; 1982].

A la température de la pièce, certains corps peuvent être aimantés. D'un point de vue microscopique, cela signifie que les spins associés aux électrons d'une couche interne incomplète sont quasiment alignés. En chauffant un ferromagnétique au-dessus de la température de Curie T_c , l'aimantation disparaît et la substance devient paramagnétique. Intuitivement, la tendance à l'alignement des spins est due à une interaction entre spins qui le favorise (voir \mathcal{H} du modèle de Heisenberg). Cependant, à haute température, l'agitation thermique tend à détruire cet alignement et, par ricochet, provoque la disparition de l'aimantation. En l'absence de champ magnétique

extérieur, l'aimantation spontanée M_0 (appelée ainsi du fait que le champ \mathbf{H} est nul) a l'allure représentée par la figure 1.3. Se rappelant que le hamiltonien du modèle de Heisenberg sans champ externe est :

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i \cdot \sigma_j$$

on peut s'étonner de l'existence d'une aimantation spontanée. En effet, \mathcal{H} est invariant par rotation.

Points critiques	Matériau	T_c (K)	α	β	γ	δ
Anti-ferro-aimant	FeF_2	78,26	0,112 $\pm 0,044$			
	$RbMnF_3$	83,05	-0,139 $\pm 0,007$	0,316 $\pm 0,008$	1,397 $\pm 0,034$	
Liquide-gaz	Xe	289,74	0,08 $\pm 0,02$	0,344 $\pm 0,003$	1,203 $\pm 0,002$	4,4 $\pm 0,4$
	He_4	5,1885	0,127	0,3554 $\pm 0,0028$	1,17 $\pm 0,0005$	
Solution binaire	$COCl_4 - C_7F_{14}$	301,78		0,335 $\pm 0,02$	1,2	~ 4
Alliage binaire	$Co - Zn$	739		0,305 $\pm 0,005$	1,25 $\pm 0,02$	

Tableau 1.3: Valeurs expérimentales de certains exposants critiques [Ma ; 1982].

Comme on l'a déjà dit, pour $T > T_c$, il n'y a aucune direction privilégiée dans l'échantillon ferromagnétique, ce qui est en accord avec l'invariance de \mathcal{H} par rotation. Au contraire, pour $T < T_c$, il existe une direction d'espace privilégiée, celle de l'aimantation. Ainsi, l'état du système n'est invariant que pour un sous-groupe du

groupe des rotations, celui des rotations autour d'un axe parallèle à la direction de l'aimantation. Autrement dit, le groupe de symétrie de la phase basse température est un sous-groupe de celui de la phase haute-température. Ce phénomène est appelé *brisûre (spontanée) de symétrie*. Cette notion se retrouve dans toutes les transitions de deuxième ordre. Bien que rien ne permette a priori de choisir une direction privilégiée, son existence peut être causée par la plus petite inhomogénéité ou le plus petit champ magnétique résiduel.

On peut aussi considérer le phénomène critique d'un autre point de vue : *l'invariance d'échelle*. Pour ce faire, on prend un ferromagnétique à $T > T_c$. On y observe des amas de spins en haut (\uparrow) et des amas de spins en bas (\downarrow), leur taille étant de l'ordre de la longueur de corrélation ξ , en moyenne : le système de spins fluctue, de sorte qu'on y retrouve des amas de taille inférieure ou supérieure à ξ . On diminue T en s'approchant de T_c : la taille moyenne des amas augmente (ξ augmente). A $T = T_c$, on trouve des amas de toutes les tailles possibles : à l'intérieur de mers de spins \uparrow , on trouve des îlots de spins \downarrow , à l'intérieur desquels on peut observer des lacs de spins \uparrow , etc. A $T = T_c$, *les fluctuations ont toutes les tailles possibles : il n'y a plus d'échelle de longueur*, c'est ce que l'on appelle *l'invariance d'échelle* au point critique.

Un fait remarquable de la transition de phase est qu'à partir d'une interaction à courte portée (entre plus proches voisins), on obtienne des corrélations à longue portée ($\sim \xi$) et même de portée infinie à $T = T_c$. Ceci rend impossible l'application des développements perturbatifs classiques. Cette complexité amène cependant un côté positif : la transition de phase étant un phénomène coopératif à grande échelle, on peut faire l'hypothèse que certaines caractéristiques de la transition ne dépendent que de propriétés générales (dimension de l'espace, dimension du paramètre d'ordre, symétries du couplage des variables locales) et non du détail des interactions. C'est ce qu'on a appelé l'universalité . Ainsi, deux réseaux d'Ising triangulaire et carré auront les mêmes exposants critiques (qui sont universels) alors que les températures critiques seront différentes : elles dépendent du détail de l'interaction et ne sont donc pas universelles [Le Bellac ; 1988].

Voilà qui donne une bonne idée de la physique sous-jacente aux transitions de phase et phénomènes critiques. Afin de mettre tous ces concepts sous une forme mathématique, il faut introduire les outils de la physique statistique reliés à ces phénomènes. C'est ce que le prochain chapitre s'efforcera de réaliser.

Chapitre 2

Transition de phase et physique statistique

Ce chapitre vise à expliquer l'apparition de comportements singuliers dans les quantités thermodynamiques, lorsque l'on approche une région de transitions de phase. Nous allons donc voir quelques définitions de base de la physique statistique en §2.1. On suivra ensuite les traces de Yang et Lee pour expliquer l'apparition de transition (§2.2). Finalement, §2.3 explicitera cette théorie en l'appliquant au modèle d'Ising.

2.1 Définitions et concepts de base

Cette section sera consacrée à un rappel des concepts de base. Il ne sera question ici que de systèmes classiques, les systèmes quantiques n'étant pas abordés dans ce travail.

Tout d'abord, définissons la *limite thermodynamique*. Prendre cette limite revient à dire que l'on considère un système infini, mais dont la structure est la même que le système fini correspondant. Pour une quantité $\Gamma(V, N)$ dépendant du volume V et du nombre de particules N , la limite thermodynamique donne :

$$\Gamma(v, n) = \lim_{N, V \rightarrow \infty} \Gamma(V, N) \quad \text{avec} \quad N/V = \text{cte} \quad (2.1)$$

Définissons maintenant *l'énergie libre* : c'est l'énergie qui peut être emmagasinée dans un système et restituée par ce même système. Il y a autant de formes d'énergie libre dans un système thermodynamique qu'il y a de combinaisons de contraintes. Les cinq plus communes sont : l'énergie interne U , l'enthalpie H , l'énergie libre de Helmholtz

A , l'énergie libre de Gibbs G et le potentiel grand canonique Ω . Ces quantités jouent un rôle analogue à celui de l'énergie potentielle dans un ressort et sont appelées, pour cette raison, des *potentiels thermodynamiques* [Pathria ; 1986].

L'énergie interne U est utilisée surtout dans les systèmes fermés et isolés (*ensemble microcanonique*). Elle peut être calculée à partir de la mécanique quantique ou classique, en autant que l'on connaisse le hamiltonien \mathcal{H} du système. L'enthalpie H est utilisée pour des systèmes fermés et isolés thermiquement, mais couplés mécaniquement au milieu extérieur. Pour sa part, l'énergie libre de Helmholtz A est utile surtout pour les systèmes qui sont fermés et thermiquement couplés au milieu extérieur, mais qui sont mécaniquement isolés (*ensemble canonique*). Dans le cas de l'énergie libre de Gibbs G , le système est couplé thermiquement et mécaniquement au milieu extérieur. Finalement, le potentiel grand canonique Ω est utilisé pour les systèmes ouverts, où le nombre de particules peut varier ; il correspond à l'*ensemble grand canonique*. En thermodynamique, ces quantités sont définies comme suit [Pathria ; 1986] :

$$\begin{aligned} U &= E \\ H &= U + PV \\ A &= U - TS \\ G &= U - TS + PV \\ \Omega &= U - TS - \mu N \end{aligned} \tag{2.2}$$

Toutes ces quantités peuvent être obtenues à partir des fonctions de partition des ensembles correspondants. Ainsi, dans le formalisme de Gibbs, A est donnée par :

$$A = -k_B T \ln Z_N(T, V) \tag{2.3}$$

où

$$Z_N(T, V) = \frac{1}{C^N} \int d\mathbf{X}^N e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{X}^N)} \tag{2.4}$$

avec $\beta \equiv 1/k_B T$. $Z_N(T, V)$ est appelée la *fonction de partition*. La constante C^N est évaluée par des calculs quantiques ; sa valeur dépend du type de système de particules :

$$C^N = \begin{cases} (h)^{3N} & , \text{ pour des particules discernables} \\ N!(h)^{3N} & , \text{ pour des particules indiscernables} \end{cases}$$

où h est la constante de Planck. À partir de (2.3), on retrouve toutes les quantités thermodynamiques désirées, telles l'entropie $S = -(\partial A / \partial T)_{V, N}$; la pression $P = -(\partial A / \partial V)_{T, N}$; ou encore le potentiel chimique $\mu = (\partial A / \partial N)_{T, V}$. Pour l'ensemble grand canonique, Ω est donnée par :

$$\Omega(T, V, \mu) = -k_B T \ln Z(T, V, \mu) \tag{2.5}$$

avec

$$Z(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{C^N} \int d\mathbf{X}^N \exp \left\{ -\beta \left[\mathcal{H}(\mathbf{X}^N) - \mu N \right] \right\} \quad (2.6)$$

La fonction $Z(T, V, \mu)$ est la *fonction de partition grand canonique*. On peut retrouver les quantités thermodynamiques à partir de (2.5). Ainsi, l'entropie est donnée par $S = -(\partial\Omega/\partial T)_{V, \mu}$; la pression par $P = -(\partial\Omega/\partial V)_{T, \mu}$; ou encore le nombre moyen de particules par $\langle N \rangle = (\partial\Omega/\partial\mu)_{T, V}$. Donc, le calcul des fonctions de partition permet de dériver toutes les quantités thermodynamiques désirées [Reichl ; 1987].

Notons que dans la limite thermodynamique l'ensemble canonique et l'ensemble microcanonique deviennent équivalents, alors que l'ensemble grand canonique se ramène à l'ensemble canonique [Reichl ; 1987].

Avant de clore cette section sur les définitions et les concepts de base de la physique statistique, on peut expliquer un peu mieux la distinction entre les différents types de transitions de phase. Comme on vient de le mentionner, on peut faire correspondre une énergie libre à un système thermodynamique particulier. Dans les régions de transitions de phase, l'énergie libre doit être continue, mais ses dérivées ont des discontinuités. Ainsi, les transitions pour lesquelles il y a un changement discontinu de l'état du système correspondent à une discontinuité dans la dérivée première de l'énergie libre ; ces transitions sont appelées *transitions du premier ordre*. Dans le cas où le changement d'état est continu, les transitions sont appelées des *transitions continues de phase* ou encore *transitions de phase d'ordre supérieur* ; elles correspondent à des discontinuités dans les dérivées d'ordre supérieur de l'énergie libre [Pathria ; 1986]. Voyons maintenant la théorie expliquant les transitions de phase.

2.2 Théorie de Yang-Lee

Au début des années 50, l'apparition de comportements singuliers dans les quantités thermodynamiques, dans un formalisme tel celui de Gibbs, n'était pas encore comprise. Lee et Yang ont utilisé des arguments simples faisant appel à l'ensemble grand canonique pour expliquer ces comportements [Yang et Lee ; 1952] [Lee et Yang ; 1952].

Considérons un système classique de particules interagissant par l'entremise d'un potentiel $V(|\mathbf{q}_{ij}|)$ tel que [Reichl ; 1987] :

$$V(|\mathbf{q}_{ij}|) = \begin{cases} \infty & , \quad |\mathbf{q}_{ij}| < a \\ -\epsilon & , \quad a \leq |\mathbf{q}_{ij}| \leq b \\ 0 & , \quad b \leq |\mathbf{q}_{ij}| \end{cases} \quad (2.7)$$

où $|\mathbf{q}_{ij}|$ est la distance entre deux particules. Notons que ϵ pourrait dépendre de $|\mathbf{q}_{ij}|$ et tous les développements subséquents seraient valides. Le hamiltonien du système est :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i<j=1}^{1/2N(N-1)} V(|\mathbf{q}_{ij}|) \quad (2.8)$$

où p_i est la quantité de mouvement, m est la masse d'une particule et N le nombre de particules dans le système. Notons que c'est un système de particules identiques.

Du fait que le potentiel possède un coeur central impénétrable de rayon a , il y a donc un nombre maximal M de particules pouvant occuper un volume déterminé V . La fonction de partition grand canonique définie en (2.6) devient alors ;

$$Z(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^M \frac{1}{C^N} \iint d\mathbf{p}^N d\mathbf{q}^N \exp \left\{ -\beta [\mathcal{H}(\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N) - \mu N] \right\}$$

On considère un gaz (particules indiscernables) d'où $C^N = N!h^{3N}$. En substituant ceci dans l'expression précédente et y insérant le hamiltonien (2.8), on trouve après intégration sur les variables d'impulsion :

$$Z(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^M \frac{e^{\beta\mu N}}{N!h^{3N}} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3N/2} \int d\mathbf{q}^N \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \sum_{i<j=1}^{1/2N(N-1)} V(|\mathbf{q}_{ij}|) \right\}$$

Posons ;

$$Q_N(V, T) = \int d\mathbf{q}^N \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \sum_{i<j=1}^{1/2N(N-1)} V(|\mathbf{q}_{ij}|) \right\} \quad (2.9)$$

et

$$y \equiv \frac{e^{\beta\mu}}{\lambda_T^3}, \quad \text{où} \quad \lambda_T \equiv \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{1/2} \quad (2.10)$$

y est appelée la *fugacité*, λ_T la *longueur d'onde thermique*, et $Q_N(V, T)$ l'*intégrale de configuration*. La fonction de partition s'écrit finalement comme :

$$Z(T, V, y) = \sum_{N=0}^M y^N \frac{Q_N(V, T)}{N!} \quad (2.11)$$

On voit bien que $Z(T, V, y)$ est un polynôme d'ordre M du paramètre y . Notons que l'information importante est contenue dans $Q_N(T, V)$. Pour $N > M$, $Q_N(T, V) = 0$ du fait de la présence d'un coeur impénétrable dans (2.7). De plus, pour $N \leq M$, $Q_N(T, V) \geq 0$ et $\in \mathfrak{R}$, du fait que le potentiel est négatif ou encore nul. Donc, les coefficients $Q_N(T, V)/N!$ de y^N sont tous réels et positifs [puisque $N \leq M$ dans $Z(T, V, y)$].

On peut réécrire (2.11) sous la forme d'un produit :

$$Z(T, V, y) = \prod_{i=1}^M \left(1 - \frac{y}{y_i}\right) \quad (2.12)$$

où les y_i sont les M zéros de l'équation

$$Z(T, V, y) = 0 \quad (2.13)$$

Du fait que les coefficients de y^N dans (2.11) soient tous positifs et réels, aucune des racines y_i ne peut être réelle et positive. En effet, on a $Z(T, V, y) = \sum_{N=0}^M a_N y^N$, où $a_N \equiv Q_N/N! > 0$ et $a_N \in \mathfrak{R}$. Pour que $\sum a_N y^N = 0$, il y a différentes possibilités : $a_N = 0 \forall N$, ce qui est impossible d'après la définition de $Q_N(T, V)$; $y = 0$, ce qui est encore une fois inacceptable physiquement. Les racines y_i doivent nécessairement être complexes pour satisfaire (2.13).

Donc, pour M fini, toutes les racines y_i doivent être réelles et négatives, ou complexes : il n'y a pas de racine réelle positive. Notons que les racines y_i sont des fonctions des paramètres V et T et (par l'entremise des Q_N) dépendent aussi de la nature des interactions inter-particules ; formellement on peut écrire $y_i = y_i(V, T)$. Puisque les racines complexes d'une équation algébrique à coefficients réels arrivent toujours par paires, *i.e.* que si y_i est une racine d'une équation donnée, alors y_i^* est aussi une racine de cette équation. La distribution des y_i dans le plan complexe y est donc symétrique par rapport à l'axe réel. Enfin, le nombre M de racines est le nombre maximal de particules entrant dans le volume V , et est donc proportionnel à V [Pathria ; 1986].

Donc, à mesure que V augmente, le nombre de zéros augmente proportionnellement et, en même temps, les zéros se déplacent dans le plan complexe y . A la limite thermodynamique, $V \rightarrow \infty$ de sorte que le nombre M de zéros tend aussi vers l'infini ; la distribution des zéros est alors représentable par une *fonction de distribution* $g(y)$. L'étude de cette distribution est l'objet principal de la théorie de Yang-Lee.

Cette théorie repose sur l'étude du comportement analytique des quantités :

$$P = k_B T \lim_{V \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{V} \ln Z(V, T, y) \right] \quad (2.14)$$

et

$$\rho = \lim_{V \rightarrow \infty} \left[y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{V} \ln Z(V, T, y) \right) \right] \quad (2.15)$$

En général, $\lim_{V \rightarrow \infty}$ et $y(\partial/\partial y)$ ne peuvent être interchangés librement. Cependant, Lee et Yang ont prouvé que pour le potentiel (2.7) la limite (2.14) existe et que les opérations $\lim_{V \rightarrow \infty}$ et $y(\partial/\partial y)$ peuvent être interchangées [Yang et Lee ; 1952] :

Théorème 2.1 Pour toute valeur réelle et positive de y , $(1/V) \ln Z(V, T, y)$ approche, à mesure que $V \rightarrow \infty$, une limite qui est indépendante de la forme du volume V ¹. De plus, cette limite est une fonction monotone croissante continue de y .

Théorème 2.2 Dans le plan complexe y , si une région R contenant un segment de l'axe réel est libre de toute racine, alors dans R , pour $V \rightarrow \infty$, les quantités

$$\frac{1}{V} \ln Z(V, T, y)$$

et

$$\left(y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \frac{1}{V} \ln Z(V, T, y) \quad , \text{ pour } \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

approchent des limites qui sont analytiques par rapport à y . De plus, les opérations $\lim_{V \rightarrow \infty}$ et $y(\partial/\partial y)$ commutent dans R , de sorte que :

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \left[y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{V} \ln Z(V, T, y) \right) \right] = y \frac{\partial}{\partial y} \lim_{V \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{V} \ln Z(V, T, y) \right)$$

Les théorèmes 2.1 et 2.2, avec les équations (2.14) et (2.15), permettent d'écrire :

$$\rho = y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{k_B T} \right) \quad (2.16)$$

Ils nous disent donc que la pression doit être continue pour toute valeur de y , mais que les dérivées de la pression ne sont continues (ou analytiques) que dans les régions R exemptes de zéros. Dans de telles régions, le système ne peut avoir qu'une seule phase présente. Notons que seules les valeurs sur l'axe réel positif ont une signification physique. Donc, des singularités dans (2.15) peuvent apparaître si la variable y passe par des zéros y_i , *i.e.* entre deux régions R différentes.

Or, comme on l'a montré précédemment, il ne peut y avoir de zéros sur l'axe réel positif pour un volume fini. Pour un volume fini, il n'y aura pas de singularité et donc pas de transition de phase ; le système sera dans une seule phase [voir la figure 2.1]. Bien qu'aucun zéro ne puisse se trouver sur l'axe réel positif, les zéros peuvent s'en approcher lorsque $V \rightarrow \infty$, de manière à ce que pour une certaine valeur physique de y , par exemple $y = t$, tout le voisinage, cependant petit, du point t contienne certains zéros. Alors, notre région R ne peut inclure le point $y = t$; cette région se sépare en deux sous-régions R_1 et R_2 [voir la figure 2.2]. Le second théorème de Yang et Lee

¹En autant que le volume se "comporte bien", *i.e.* que sa surface n'augmente pas trop vite à mesure que V augmente : de fait, le théorème est valide si la surface n'augmente pas plus vite que $V^{2/3}$.

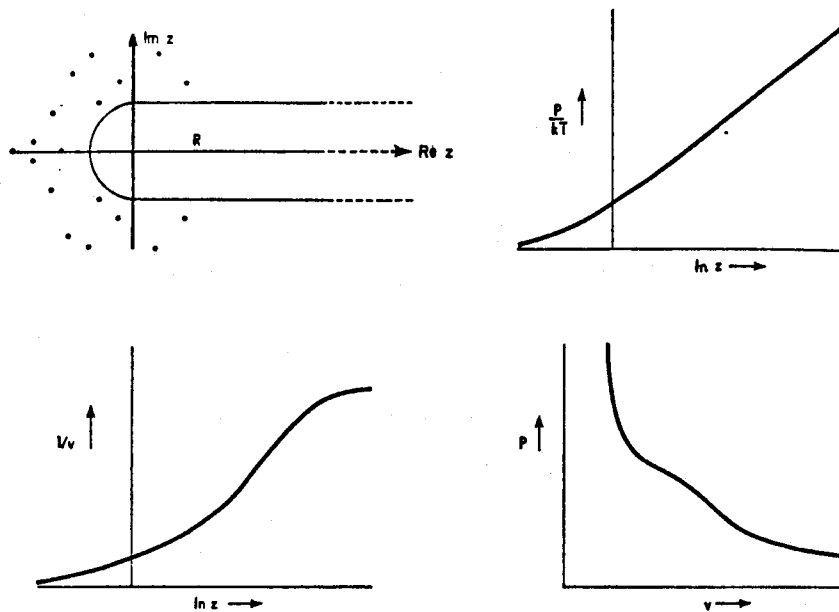


Figure 2.1: Distribution des zéros pour un système fini ($z \equiv y$) [Pathria ; 1986].

s'applique alors aux deux régions R_1 et R_2 , sauf à $y = t$. Ce point $y = t$ est souvent appelé une *singularité de Yang-Lee*. On a donc une phase simple dans R_1 (phase 1), de même que dans R_2 (phase 2) ; à $y = t$, il y a coexistence des deux phases. Ce point est donc un point se situant sur la courbe du diagramme de phase [voir la figure 1.1 par exemple]. La fonction P possède une discontinuité de sa pente et la fonction ρ une discontinuité de sa valeur, à $y = t$. Comme le montre clairement la figure 2.2, le système se trouve bien dans une région de transition de phase [Pathria ; 1986].

Avant de terminer cette section, on peut mentionner que les singularités de Yang-Lee se retrouvent aussi dans le cas de la fonction de partition canonique ². En effet, d'après les définitions (2.4) et (2.6), on peut écrire :

$$Z(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} Z_N(T, V) \quad (2.17)$$

Donc, si $Z_N(T, V) = 0$, $Z(T, V, \mu)$ aussi est nulle, de sorte qu'aux zéros de Z_N correspondent les zéros de $Z(T, V, \mu)$ ³. Ceci revient à dire que la théorie de Yang-Lee peut aussi s'appliquer pour l'ensemble canonique. D'après (2.4), $Z_N(T, V)$ est une sommation

²Puisqu'à la limite thermodynamique, l'ensemble grand canonique se ramène à l'ensemble canonique, les mêmes conclusions doivent s'appliquer.

³Il est à noter que $e^{\beta \mu N} \rightarrow 0$ seulement si $\beta \rightarrow -\infty$, i.e. $T \rightarrow 0^-$ [pour $J > 0$]. En plus d'être une restriction considérable, c'est une condition non-physique.

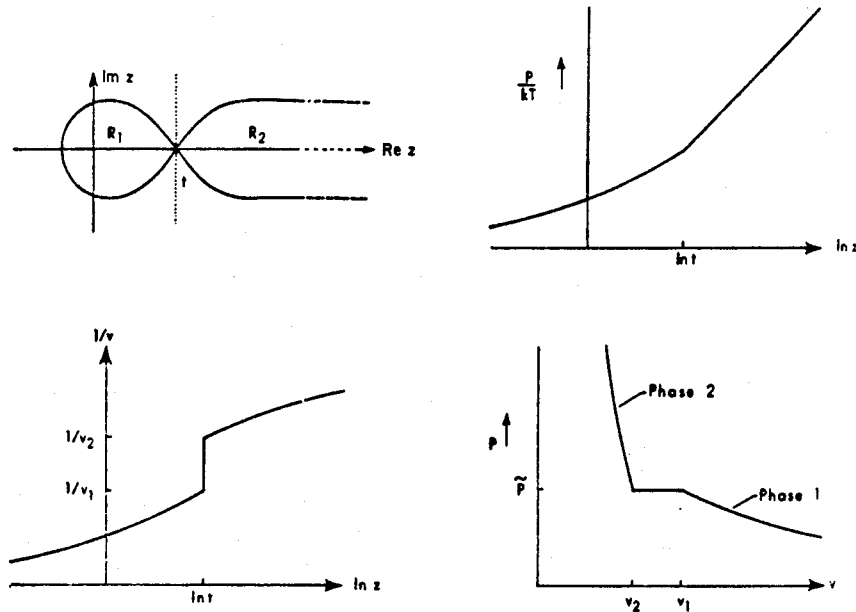


Figure 2.2: Cas où il y a une transition de phase ($z \equiv y$) [Pathria ; 1986].

de termes en $e^{-\beta E}$. Pour le modèle d'Ising on a [van Saarloos et Kurtze ; 1984] :

$$Z_N(T, V) = z^{-N/2} \sum_{n=0}^N P_n z^n = z^{-N/2} P_0 \prod_{r=1}^N \left(1 - \frac{z}{z_r}\right) \quad (2.18)$$

où $z \equiv e^{-2H/k_B T}$, P_n est le $n^{i\text{eme}}$ coefficient du polynôme et z_r est la $r^{i\text{eme}}$ racine du polynôme. Dans le cas général, puisque $Z_N(T, V)$ est une somme de $e^{-\beta E}$, c'est une fonction entière de β . On peut donc exprimer la fonction de partition pour un système fini en termes des zéros complexes z_r [Fisher ; 1965] :

$$Z_N(T, V) = \prod_{r=1}^N \left(1 - \frac{z}{z_r}\right) \quad (2.19)$$

à une constante près. Comme dans le cas grand canonique, les zéros ne peuvent toucher l'axe réel positif pour un système fini. Cependant, à la limite thermodynamique, la distribution pourra aussi pointer un point d'accumulation sur l'axe.

En résumé, la théorie de Yang-Lee permet de relier le problème des transitions de phases à la distribution des zéros $g(y)$ de la fonction de partition grand canonique, dans le plan complexe y de façon simple et satisfaisante. De plus, cette théorie est très générale car les restrictions sur la forme de $V(|q_i|)$ sont, pour la plupart des systèmes physiques, facilement satisfaites [Pathria ; 1986].

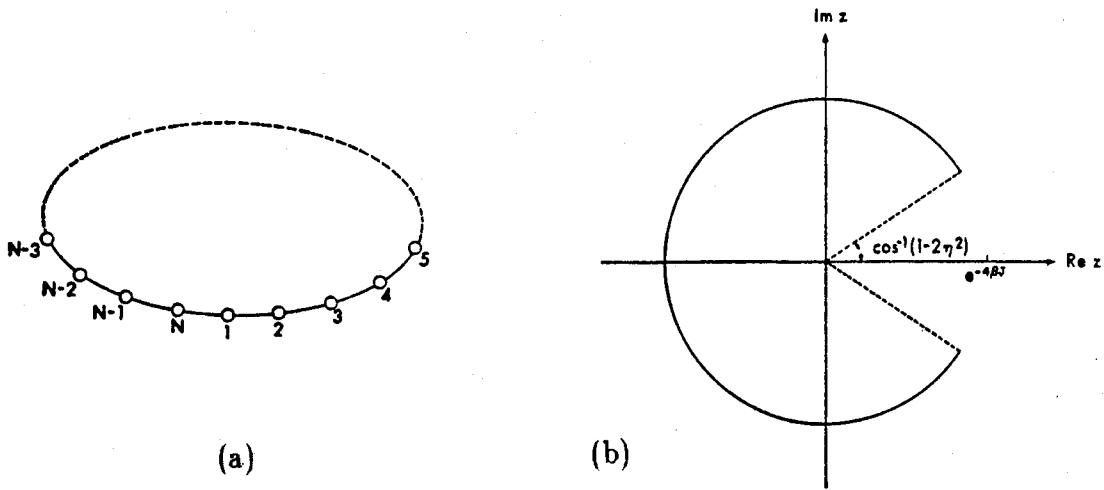


Figure 2.3: (a) Chaîne d'Ising avec conditions aux frontières cycliques ; (b) distribution des zéros pour le modèle d'Ising en une dimension [Pathria ; 1986].

2.3 Distribution des zéros

Dans cette section, il sera question de la distribution des zéros de la fonction de partition. On donnera d'abord les résultats connus pour des systèmes résolus analytiquement, notamment le modèle d'Ising en une et deux dimensions. Puis on citera quelques résultats plus généraux concernant ces distributions.

2.3.1 Modèles d'Ising

Pour connaître la distribution des singularités de Yang-Lee, il faut connaître la fonction de partition ; le modèle d'Ising en une et deux dimensions a l'avantage d'être résolu analytiquement, de sorte que l'on peut étudier cette distribution de manière exacte. Notons que la théorie de Yang-Lee s'applique bien au modèle d'Ising : il n'y a qu'un spin par site (ce qui correspond au coeur impénétrable) et la portée de l'interaction est finie (entre les plus proches voisins seulement).

A. Ising en une dimension

La fonction de partition d'un modèle d'Ising est :

$$Z_N(H, V) = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)} \quad (2.20)$$

où $\{\sigma\}$ signifie l'ensemble des configurations. $\mathcal{H}(\sigma)$ est donnée par (1.7). Dans le cas d'un réseau en une dimension constitué de N spins avec des conditions aux frontières cycliques [voir la figure 2.3], *i.e.* $\sigma_{N+1} = \sigma_1$, la solution de (2.20) est connue analytiquement

[Pathria ; 1986]. On trouve :

$$Z_N(H, T) = \lambda_+^N + \lambda_-^N \quad (2.21)$$

avec

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta J} \cosh(\beta \mu H) \pm \left\{ e^{-2\beta J} + e^{2\beta J} \sinh^2(\beta \mu H) \right\}^{1/2}$$

où $J = \frac{1}{2} J_{ij}$ et $\mu = g \mu_B$ [voir (1.7)]. Dans la limite thermodynamique ($N \rightarrow \infty$), seul λ_+ persiste de sorte que :

$$Z_N(H, T) = \left[e^{\beta J} \cosh(\beta \mu H) + \left\{ e^{-2\beta J} + e^{2\beta J} \sinh^2(\beta \mu H) \right\}^{1/2} \right]^N \quad (2.22)$$

Afin de se ramener à un gaz sur réseau, on définit

$$z \equiv \exp(-4\beta J + 2\beta \mu H) \quad (2.23)$$

Lee et Yang ont démontré le théorème suivant [Pathria ; 1986] :

Théorème 2.3 *Si l'énergie d'interaction entre deux atomes d'un gaz sur réseau est $+\infty$ s'ils occupent le même site et ≤ 0 autrement, alors tous les zéros de la fonction de partition grand canonique se trouvent, dans le plan complexe z , sur un cercle dont le centre se situe en $z = 0$.*

Les zéros de $Z_N(H, T)$ sont donnés par :

$$\lambda_+^N + \lambda_-^N = 0 \quad (2.24)$$

Avec

$$\beta \mu H \equiv \frac{i\theta}{2} \quad \text{et} \quad \eta \equiv \exp(-2\beta J)$$

on peut écrire

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \pm \left(\eta^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} \right] \quad (2.25)$$

Donc, (2.24) devient ⁴ :

$$\left[\cos \frac{\theta}{2} + \left(\eta^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} \right]^N + \left[\cos \frac{\theta}{2} - \left(\eta^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} \right]^N = 0 \quad (2.26)$$

Posant

$$\cos \frac{\theta}{2} = (1 - \eta^2)^{1/2} \cos \phi \quad (2.27)$$

⁴En autant que $T \neq 0$, car alors, si $T = 0$, $\sqrt{\eta} = 0$ et l'on obtient une indétermination [$J > 0$].

l'équation (2.26) se réduit à :

$$(1 - \eta^2)^{N/2} \left\{ (\cos \phi + i \sin \phi)^N + (\cos \phi - i \sin \phi)^N \right\} = 0$$

i.e.

$$\cos(N\phi) = 0 \quad (2.28)$$

Les solutions sont :

$$\phi = \pm(k - 1/2) \frac{\pi}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.29)$$

En fonction de θ , cela donne :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\eta^2 + (1 - \eta^2) \cos 2\phi \\ &= -\eta^2 + (1 - \eta^2) \cos \left\{ (2k - 1) \frac{\pi}{N} \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Cette équation donne la position exacte des N zéros dans le plan complexe z . Lorsque $N \rightarrow \infty$, la distribution des zéros devient continue. Pour toute valeur de η , la distribution est confinée sur un "fer à cheval" sur le cercle, commençant à $\theta_i = \cos^{-1}(1 - 2\eta^2) = 2 \sin^{-1} \eta$ et se terminant à $\theta_f = 2\pi - \theta_i$ [voir la figure 2.3]. La distribution a donc une ouverture sur l'axe réel, dont la largeur angulaire est de $2 \cos^{-1}(1 - 2\eta^2) = 4 \sin^{-1} \eta$. Cette "ouverture" se "referme" *seulement si* $\eta = 0$, *i.e.* pour $T = 0K$. Ceci signifie que le modèle d'Ising en une dimension ne peut avoir une transition de phase pour une température finie. Dans le cas continu, on peut introduire la *fonction de distribution* $g(\theta)$. Alors, par définition, le produit $g(\theta)d\theta$ représente la fraction des zéros compris dans l'intervalle $(\theta, \theta + d\theta)$ [Pathria ; 1986]. En clair,

$$g(\theta) = \frac{1}{N} \left(\frac{dk}{d\theta} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\theta/2)}{\left\{ \sin^2(\theta/2) - \eta^2 \right\}^{1/2}}, & \text{sur le fer à cheval} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.31)$$

On peut vérifier que $g(\theta)$ satisfait bien la condition de normalisation :

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = 1 \quad (2.32)$$

Il est intéressant d'étudier le comportement de $g(\theta)$. En l'absence d'interaction ($J = 0$), ou encore dans la limite $T \rightarrow \infty$, le paramètre η peut être remplacé par l'unité. La fonction $g(\theta)$ est alors nulle partout, sauf à $\theta = \pi$ où elle a une valeur infinie ; en effet, dans ce cas, $g(\theta)$ a la forme d'une fonction delta de Dirac. L'équation (2.30) illustre bien ceci, car alors $\cos \theta = -1$. A mesure que l'interaction se manifeste, ou encore que la température diminue, la distribution des zéros s'étend, la fonction $g(\theta)$ étant minimale

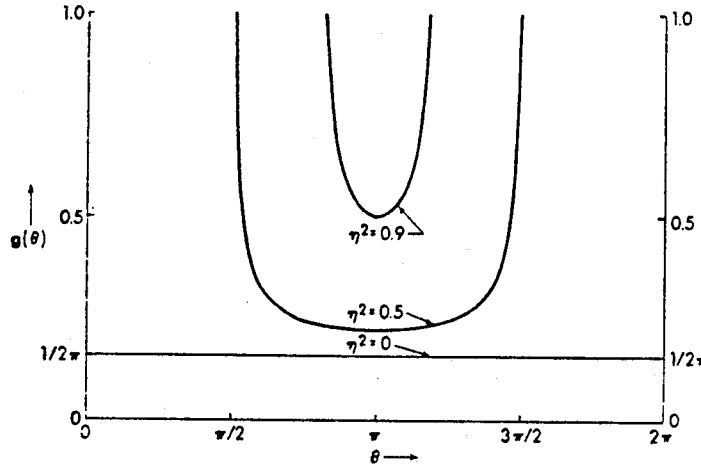


Figure 2.4: La fonction de distribution $g(\theta)$ en fonction du paramètre η [Pathria ; 1986].

au point (central) $\theta = \pi$ et devenant de plus en plus grande à la fin des segments du fer à cheval. Finalement, lorsque $T \rightarrow 0$ (et $\eta \rightarrow 0$), on obtient la distribution *limite* qui est uniformément répartie sur la totalité du cercle, de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$, avec une valeur constante de $1/2\pi$. Le déplacement des zéros est illustré à la figure 2.4.

B. Ising en deux dimensions

La solution exacte du modèle d'Ising en deux dimensions sur un réseau carré anisotrope sans champ magnétique externe fut obtenue pour la première fois par Onsager en 1944 [Onsager ; 1944]. La fonction de partition exacte est ⁵ :

$$Z_N = \prod_{r=1}^m \prod_{s=1}^{n/2} (\cosh 2K_1 \cosh 2K_2 - \alpha \sinh 2K_1 - \beta \sinh 2K_2) \quad (2.33)$$

où

$$\alpha \equiv \cos \frac{2\pi r}{m}, \quad \beta \equiv \cos \frac{2\pi s}{n}, \quad K_i \equiv \frac{J_i}{k_B T} \quad (2.34)$$

et $N = mn$, où n est paire. On peut examiner le réseau isotrope, ou le réseau anisotrope.

1. Réseau isotrope :

Dans ce cas $K_1 = K_2 = K$, de sorte que (2.63) se réduit à :

$$Z_N = \prod_{r=1}^m \prod_{s=1}^{n/2} [\cosh^2 2K - (\alpha + \beta) \sinh 2K] \quad (2.35)$$

⁵Pour des conditions aux frontières toroïdales utilisées pour ce problème, il y a quatre produits similaires à (2.33), avec r et s remplacés par $r - 1/2$ et $s - 1/2$ respectivement. Cependant, à la limite thermodynamique, le seul terme (2.33) suffit à décrire la distribution asymptotique des zéros.

Pour avoir $Z_N = 0$, il suffit que le terme entre [] soit nul, *i.e.*

$$\begin{aligned} \cosh^2 2K - (\alpha + \beta) \sinh 2K &= \sinh^2 2K + 1 - (\alpha + \beta) \sinh 2K \\ &= S[S + S^{-1} - (\alpha + \beta)] = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

avec $S \equiv \sinh 2K$. Puisque $|\alpha + \beta| \leq 2$, on peut écrire

$$\cos \phi \equiv \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad (2.37)$$

de sorte que l'équation à résoudre est :

$$S[S + S^{-1} - 2 \cos \phi] = 0 \quad (2.38)$$

Il y a deux possibilités. On peut avoir $S = 0 \Rightarrow K = J/k_B T = 0 \Rightarrow J = 0$ ou $T \rightarrow \infty$, ce qui n'est pas acceptable. L'autre solution est donnée par la paramétrisation suivante :

$$S = e^{i\phi} \quad (2.39)$$

On vérifie alors aisément que (2.38) est satisfaite. Donc, les zéros sont situés sur un cercle de rayon 1 dans le plan complexe de la variable S , *i.e.* :

$$|S| = |\sinh 2K| = 1 \quad (2.40)$$

Ceci nous donne deux points coupant l'axe réel, à $S = \pm 1$ [voir la figure 2.5]. $S = +1$ correspond au point critique ferromagnétique alors que $S = -1$ indique le point critique antiferromagnétique. En écrivant $S = x + iy$, la fonction de distribution des zéros près de l'axe réel, à $S = \pm 1$, est de la forme [Stephenson et Conzens ; 1984] :

$$g(y) \sim \frac{|y|}{2\pi}$$

2. Réseau anisotrope :

Ici, $K_1 \neq K_2$, de sorte que les zéros ne dépendront pas d'un simple paramètre $(\alpha + \beta)$, mais des deux paramètres α et β séparément. Ainsi, au lieu de se situer sur des courbes (comme dans le cas isotropique), les zéros se situeront sur des surfaces. Afin de mieux visualiser ceci, prenons un exemple précis.

Si $K_1 = K$ et $K_2 = 3K$, alors ;

$$\sinh 2K_2 = \sinh 6K = 3 \sinh 2K + 4 \sinh^3 2K \quad (2.41)$$

$$\cosh 2K_2 = \cosh 6K = 4 \cosh^3 2K - 3 \cosh 2K \quad (2.42)$$

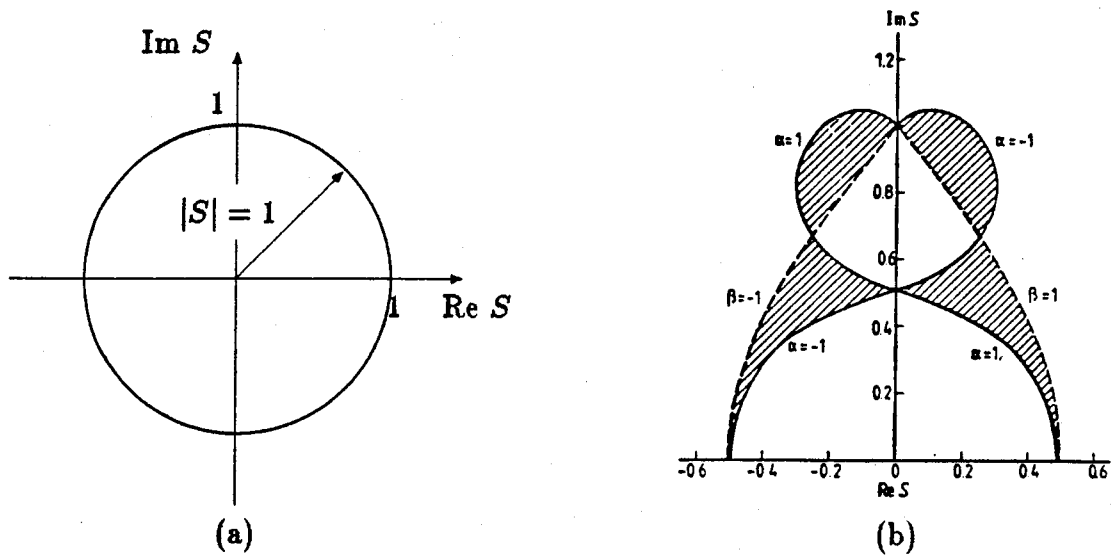


Figure 2.5: Distribution des zéros du modèle d'Ising en deux dimensions : (a) réseau carré isotrope ; (b) réseau carré anisotrope [van Saarloos et Kurtze ; 1984].

de sorte que :

$$\begin{aligned}
 & \cosh 2K_1 \cosh 2K_2 - \alpha \sinh 2K_1 - \beta \sinh 2K_2 \\
 &= \cosh 2K \left[4 \cosh^3 2K - 3 \cosh 2K \right] - \alpha \sinh 2K - \beta \left[3 \sinh 2K + 4 \sinh^3 2K \right] \\
 &= 4(1 + 2 \sinh^2 2K + \sinh^4 2K) - 3(1 + \sinh^2 2K) - (\alpha + 3\beta) \sinh 2K - 4\beta \sinh^3 2K \\
 &= 4S^4 - 4\beta S^3 + 5S^2 - (\alpha + 3\beta)S + 1 \tag{2.43}
 \end{aligned}$$

Les zéros de Z_N sont donnés par :

$$4S^4 - 4\beta S^3 + 5S^2 - (\alpha + 3\beta)S + 1 = 0 \tag{2.44}$$

Puisque $|\alpha| \leq 1$ et $|\beta| \leq 1$, les zéros sont situés sur des surfaces bornées. Ces régions sont celles hachurées sur la figure 2.5. On remarque que les aires deviennent denses près de l'axe réel, ce qui donne le comportement thermodynamique souhaité, *i.e.* des points critiques bien définis. Ceux-ci se situent à $S = \pm 1/2$. Finalement, on note que la densité des zéros diverge comme $\rho^{-1/2}$ où ρ est la distance aux frontières de la distribution, *i.e.* que g diverge à ces frontières $\alpha = \pm 1$ et $\beta = \pm 1$. Ceci est apparent si l'on examine l'expression de g .

Pour $\delta S \equiv S - S_c$ ($S_c = \pm 1/2$) et une anisotropie arbitraire $\Delta \equiv K_2/K_1 > 0$, g se comporte comme [van Saarloos et Kurtze ; 1984] :

$$g(S) \sim \frac{|\delta S''|}{\{[-\delta S' - c_2(\delta S'')^2][\delta S' + c_1(\delta S'')^2]\}^{1/2}} \tag{2.45}$$

où $\delta S' \equiv \text{Re}(\delta S)$ et $\delta S'' \equiv \text{Im}(\delta S)$, avec les conditions :

$$\begin{aligned} c_2(\delta S'')^2 &\leq -\delta S' \leq c_1(\delta S'')^2 ; \text{ si } \Delta < 1 \\ c_1(\delta S'')^2 &\leq -\delta S' \leq c_2(\delta S'')^2 ; \text{ si } \Delta > 1 \end{aligned} \quad (2.46)$$

où c_1 et c_2 dépendent de Δ :

$$\begin{aligned} c_1 &\equiv [S_c^2(1 + \Delta S_c) + C_c^2][2C_c^2 S_c(1 + \Delta S_c)]^{-1} \\ c_2 &\equiv S_c[\Delta^2 C_c^2 + \Delta S_c + 1][2C_c^2(1 + \Delta S_c)]^{-1} \end{aligned} \quad (2.47)$$

avec $S \equiv \sinh 2K$, $S_c \equiv \sinh 2K_c$ et $C_c \equiv \cosh 2K_c$. Comme on le voit, $g(S)$ a une singularité due à la racine au dénominateur, comme on l'avait mentionné plus haut.

Voilà qui termine la section des exemples. On remarquera que les zéros trouvés dans ces exemples sont ceux de la fonction de partition canonique, et se situent donc dans le plan complexe de la température (par l'entremise de K).

Cependant, il existe des théorèmes pour le modèle d'Ising qui restreignent la distribution des zéros de la fonction de partition grand canonique. On en a cité un dans le cas de la chaîne d'Ising (voir le théorème 2.3). C'est d'ailleurs ces théorèmes qui nous disent qu'il n'y a pas de transition de phase, pour un modèle d'Ising, si le champ magnétique extérieur n'est pas nul ; c'est pour cette raison que l'on étudie la fonction $Z_N(H=0, T)$ au lieu de $Z_N(H, T)$. Notons que la forme exacte de $Z_N(H, T)$ n'est pas connue de manière analytique, contrairement à $Z_N(0, T)$.

2.3.2 Théorèmes de Yang-Lee généralisés

Les théorèmes et résultats qui seront donnés ici concernent la distribution des zéros dans le plan complexe du champ magnétique. Comme on l'a montré en §2.2, l'apparition de transition de phase est gouvernée par la distribution asymptotique des zéros de la fonction de partition dans la limite des grands systèmes.

Lee et Yang ont prouvé un théorème remarquable qui montre que les zéros de la fonction de partition, pour un grand nombre de modèles d'Ising ferromagnétiques, se trouvent seulement sur l'axe imaginaire du champ magnétique. Ceci implique que ces modèles ne peuvent avoir de transition de phase dans un champ non-nul.

Théorème 2.4 (Kurtze ; 1979) *Considérons un modèle d'Ising de spin 1/2 constitué de N variables de spin s_i qui prennent les valeurs ± 1 , et interagissant entre elles par l'entremise du hamiltonien*

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} s_i s_j - H \sum_i s_i \quad (2.48)$$

où H est le champ magnétique appliqué et J_{ij} , la constante de couplage, est réelle et non-négative. Alors, pour une température T fixe réelle et positive, la fonction de partition

$$Z_N(T, H) = \sum_{s_i} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}}{k_B T}\right) \quad (2.49)$$

a des zéros seulement sur l'axe imaginaire du plan $h = H/k_B T$.

En fait, Lee et Yang ont prouvé (sans le mentionner) un résultat plus général que ce dernier théorème. En effet, ce théorème est encore valide si le terme de champ $H \sum s_i$ du hamiltonien est remplacé par $H \sum \mu_i s_i$, avec μ_i réel et non-négatif, ce qui représente un champ magnétique inhomogène [Kurtze ; 1979].

Notons que le théorème 2.4 est le même que le théorème 2.3. En effet, à l'origine, Lee et Yang ont publié leurs résultats en termes de la variable dite d'activité $z = \exp(-2h)$ plutôt qu'avec le champ magnétique réduit h ; comme cette relation transforme l'axe imaginaire h en un cercle unitaire dans le plan complexe z , ce théorème est souvent appelé le *théorème du cercle*. Finalement, il est à remarquer qu'il n'y a pas de restriction sur la portée des interactions, pas plus que sur la dimensionnalité du système ou de la structure du réseau ; *le théorème est limité seulement aux modèles de spin 1/2 avec des interactions ferromagnétiques par paires* [Kurtze ; 1979].

Une extension pour des systèmes de spins supérieurs a aussi été réalisée. Finalement, plusieurs théorèmes similaires ont été démontrés pour d'autres modèles, comme le modèle de Heisenberg quantique et classique, le modèle sphérique, etc. [van Saarloos et Kurtze ; 1984]. Une brève liste de ces théorèmes est donnée à l'appendice A.

Maintenant que l'on connaît le mécanisme par lequel les transitions de phase apparaissent, voyons une méthode permettant de calculer certaines des propriétés des systèmes dans les régions critiques : le groupe de renormalisation.

Chapitre 3

Groupe de renormalisation

Dans ce chapitre, il sera question de la méthode permettant de calculer les propriétés critiques d'un système à partir de son hamiltonien. Nous aborderons en premier lieu les lois d'échelle (§3.1). Ceci introduira le concept d'invariance d'échelle sur lequel repose la méthode du groupe de renormalisation (GR). En §3.2, on donnera une description du groupe de renormalisation, d'abord par une approche qualitative, puis par un énoncé plus formel : il sera question de la technique utilisée pour calculer les exposants critiques. Enfin, §3.3 donnera des exemples d'application de la théorie décrite auparavant.

3.1 Lois d'échelle

Comme nous l'avons mentionné au §1.3.2, il y a invariance d'échelle au point critique. Cette hypothèse d'invariance d'échelle conduit à des relations entre les exposants critiques, relations qui se vérifient expérimentalement et théoriquement. L'idée de base de l'hypothèse d'invariance d'échelle est que la grande portée de la corrélation près du point critique ($\xi \rightarrow \infty$) est responsable pour tous les comportements singuliers. Notons que c'est une hypothèse très générale ne faisant appel à aucun modèle en particulier et elle est sous-jacente aux calculs des exposants critiques [Le Bellac ; 1988].

3.1.1 Fonctions homogènes

Une fonction $F(\lambda x)$ est homogène si pour toutes valeurs de λ [Reichl ; 1987]

$$F(\lambda x) = g(\lambda)F(x) \tag{3.1}$$

La forme générale de $g(\lambda)$ peut être calculée facilement. En effet,

$$F(\lambda\mu x) = g(\lambda)g(\mu)F(x) = g(\lambda\mu)F(x) \implies g(\lambda\mu) = g(\lambda)g(\mu) \quad (3.2)$$

Dérivant par rapport à μ , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} g(\lambda\mu) = \lambda g'(\lambda\mu) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \mu} g(\mu)g(\lambda) = g(\lambda)g'(\mu) \quad (3.3)$$

où $g'(\mu) = (\partial/\partial\mu)g(\mu)$. Si l'on pose $\mu = 1$ et $g'(1) = p$ dans (3.3), alors

$$\lambda g'(\lambda) = pg(\lambda) \quad (3.4)$$

D'autre part, (3.1) donne $g(1) = 1$. On peut intégrer (3.4) de 1 à λ , d'où ;

$$g(\lambda) = \lambda^p \implies F(\lambda x) = \lambda^p F(x) \quad (3.5)$$

et $F(x)$ est dite *fonction homogène de degré p*. Une fonction homogène a une forme un peu spéciale. Si l'on pose $\lambda = x^{-1}$ dans (3.5), on obtient :

$$F(x) = F(1)x^p \quad (3.6)$$

Donc, une fonction homogène $F(x)$ possède une dépendance en loi de puissance par rapport à son argument [Reichl ; 1987].

Considérons maintenant une fonction homogène généralisée à deux variables $f(x, y)$. Une telle fonction peut toujours être écrite sous la forme

$$f(\lambda^p x, \lambda^q y) = \lambda f(x, y) \quad (3.7)$$

et est caractérisée par les deux paramètres p et q . Posant $\lambda = y^{-1/q}$, il vient :

$$f(x, y) = y^{1/q} f\left(\frac{x}{y^{p/q}}, 1\right) \quad (3.8)$$

et l'on peut voir qu'une fonction homogène généralisée $f(x, y)$ dépend de x et y seulement par l'entremise du rapport $x/y^{p/q}$, à un facteur multiplicatif près [Reichl ; 1987]. On peut appliquer ces idées aux quantités thermodynamiques près des points critiques.

3.1.2 Lois d'échelle

Nous allons ici considérer les modèles de spins. Si l'on fait l'hypothèse que la partie singulière du potentiel thermodynamique "s'échelonne", *i.e.* suit une loi d'échelle, on

peut trouver des relations entre les différents exposants critiques. Soit $g(T, \mathbf{H})$ l'énergie libre par site. On peut la séparer en une partie régulière $g_r(T, \mathbf{H})$ et une partie singulière $g_s(\epsilon, \mathbf{H})$, qui contient le comportement singulier important du système au voisinage du point critique [Reichl ; 1987]. Alors,

$$g(T, \mathbf{H}) = g_r(T, \mathbf{H}) + g_s(\epsilon, \mathbf{H}) \quad (3.9)$$

où $\epsilon = (T - T_c)/T_c$. De plus, on fait l'hypothèse que la partie singulière est une fonction homogène de ses paramètres, *i.e.*

$$g_s(\lambda^p \epsilon, \lambda^q \mathbf{H}) = \lambda g_s(\epsilon, \mathbf{H}) \quad (3.10)$$

Les différents exposants de §1.3.2 peuvent tous être déterminés en fonction de p et q . Par exemple, d'après (1.10), on a :

$$M(\epsilon, H = 0) \sim (-\epsilon)^\beta \quad (3.11)$$

Puisque près du point critique une petite variation d'un paramètre affecte peu la partie régulière, alors que la partie singulière varie énormément, on peut écrire :

$$M = \left(\frac{\partial g}{\partial H} \right)_T \sim \left(\frac{\partial g_s}{\partial H} \right)_T \quad (\text{pour } T \rightarrow T_c)$$

Puisque seul $g_s(\epsilon, \mathbf{H})$ comprend la partie singulière, la forme (3.11) ne dépend que de $g_s(\epsilon, \mathbf{H})$. Différentiant (3.10) par rapport à H , on trouve

$$\lambda^q \left(\frac{\partial}{\partial H} g_s(\lambda^p \epsilon, \lambda^q \mathbf{H}) \right)_\epsilon = \lambda \left(\frac{\partial}{\partial H} g_s(\epsilon, \mathbf{H}) \right)_\epsilon$$

i.e.

$$\lambda^q M(\lambda^p \epsilon, \lambda^q \mathbf{H}) = \lambda M(\epsilon, \mathbf{H}) \quad (3.12)$$

Si l'on pose $\lambda = (-\epsilon)^{-1/p}$ et $H = 0$, on obtient :

$$M(\epsilon, 0) = (-\epsilon)^{(1-q)/p} M(-1, 0) \sim (-\epsilon)^{(1-q)/p} \quad (3.13)$$

On en conclut que

$$\beta = \frac{1-q}{p} \quad (3.14)$$

Autre exemple : la susceptibilité magnétique. D'après (1.13), on a :

$$\chi = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial H^2} \right)_{T,V} \sim \begin{cases} (-\epsilon)^{-\gamma} & , T < T_c \\ (\epsilon)^{-\gamma} & , T > T_c \end{cases} \quad (3.15)$$

En dérivant (3.12), on trouve

$$\lambda^{2q} \chi(\lambda^p \epsilon, \lambda^q H) = \lambda \chi(\epsilon, H) \quad (3.16)$$

Posant $H = 0$ et $\lambda = (\epsilon)^{-1/p}$, il vient :

$$\chi(\epsilon, 0) = \epsilon^{(1-2q)/p} \chi(1, 0) \sim \epsilon^{(1-2q)/p} \quad (3.17)$$

d'où ;

$$\gamma = \frac{2q - 1}{p} \quad (3.18)$$

Par les mêmes étapes, on trouve aussi $\gamma' = \gamma$ [Reichl ; 1987].

Bien entendu, on peut refaire le même cheminement pour les autres exposants à partir des expressions de §1.3.1 ; on trouve alors les relations suivantes ¹ :

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha' &= 2 - \frac{1}{p}, & \delta &= \frac{q}{1-q} \\ \nu = \nu' &= \frac{1}{pd}, & \eta &= d - 2q + 2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

où d est la dimension de l'espace. Nous avons donc obtenu les exposants critiques en fonction de p et q . Si l'on combine les différentes expressions, on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma = \beta(\delta - 1), & \quad \nu = \frac{2 - \alpha}{d}, & \quad \alpha + \beta(\delta + 1) = 2 \\ \eta &= 2 - d \left(\frac{\delta - 1}{\delta + 1} \right) = 2 - \frac{d\gamma}{2\beta + \gamma} \end{aligned} \quad (3.20)$$

En termes des exposants critiques, p et q sont donnés par :

$$p = \frac{1}{\beta(\delta + 1)} \quad \text{et} \quad q = \delta \frac{1}{(\delta + 1)} \quad (3.21)$$

Ces relations, appelées aussi *lois d'échelle*, ont été vérifiées expérimentalement pour des systèmes magnétiques et des fluides. On retrouve donc les lois d'échelle de §1.3.1.B :

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \alpha', & \quad \nu = \nu', & \quad \gamma = \gamma' \\ \alpha = 2 - \nu d, & \quad \beta = \frac{\gamma}{\delta - 1}, & \quad \gamma = \nu(2 - \eta) \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 2, & \quad \delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Voyons maintenant la méthode où l'hypothèse d'invariance d'échelle est l'hypothèse fondamentale : le groupe de renormalisation.

¹Pour les exposants ν, ν' et η , il faut utiliser la méthode des blocs de spins de Kadanoff [Reichl ; 1987].

3.2 Groupe de renormalisation (GR)

Dans cette section, il sera fait état des techniques utilisées dans l'espace des coordonnées ; plusieurs points essentiels à d'autres domaines, tels l'utilisation du GR dans l'espace des impulsions, ou le lien avec la théorie quantique des champs, ne pourront être abordés (voir [Amit ; 1984], [Le Bellac ; 1988], ou [Ma ; 1982]). Nous débuterons par une description qualitative de l'application du GR. Suivra ensuite un énoncé plus formel de la théorie, et enfin, les méthodes utilisées pour le calcul des exposants critiques.

3.2.1 Approche qualitative et idées de base

Au point critique, $\xi \rightarrow \infty$ et, dans le voisinage du point critique, $\xi \gg 1$. Le nombre de degrés de liberté interagissant entre eux étant $\sim \xi^d$, les phénomènes critiques sont des problèmes à grande distance où interviennent un grand nombre de degrés de liberté. Or les méthodes perturbatives échouent dans le traitement de ce genre de problème (elles fonctionnent pour un petit nombre de degrés de liberté). La méthode du GR consiste donc à réduire, étape par étape, le nombre de degrés de liberté pour en arriver à pouvoir utiliser les méthodes perturbatives. Cette réduction se réalise par l'intégration sur les fluctuations de courte longueur d'onde [Le Bellac ; 1988].

Les fondements de la méthode du groupe de renormalisation furent établis par Kadanoff [Kadanoff ; 1966]. Afin d'illustrer l'idée de Kadanoff, reportons-nous à la figure 3.1. Puisqu'il y a invariance d'échelle au point critique, on peut grouper les spins en blocs et considérer ces blocs comme de nouveaux spins : leur valeur peut être une moyenne des spins initiaux, et les blocs peuvent interagir entre eux par l'entremise d'une nouvelle constante de couplage. Comme on peut le voir sur la figure, après cette opération, on retrouve un nouveau réseau dont les dimensions ont été réduites par un facteur 2, avec de nouveaux spins interagissant entre eux par l'entremise de nouvelles constantes de couplage. Si l'on suppose que la constante de couplage entre les blocs est une certaine fonction des constantes originales, on peut écrire [Hu ; 1982] :

$$K' = R(K) \quad (3.23)$$

D'autre part, le réseau est réduit d'un facteur 2, d'où :

$$\xi[R(K)] = \frac{1}{2} \xi[K] \quad (3.24)$$

Puisque $\xi = \infty$ lorsque $K = K_c$, on doit avoir $R(K_c) = K_c$. Pour $K \sim K_c$, on peut

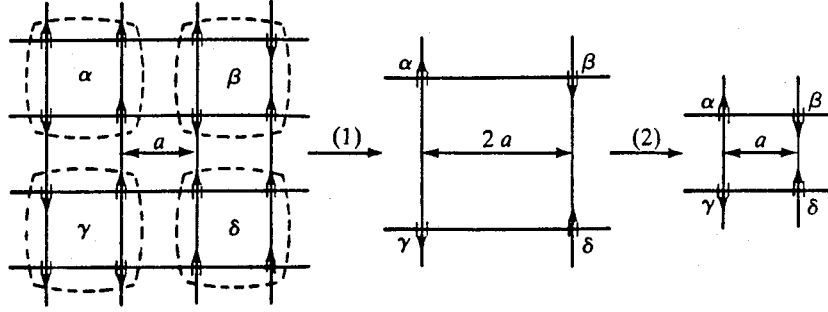


Figure 3.1: Réduction d'un réseau carré en 2-D [Le Bellac ; 1988].

linéariser (3.23) :

$$R(K) = R(K_c) + \lambda(K - K_c) \quad \text{où} \quad \lambda \equiv \left. \frac{dR}{dK} \right|_{K=K_c} \quad (3.25)$$

On trouve alors, en substituant $R(K_c) = K_c$ dans (3.25) :

$$R(K) - K_c = \lambda(K - K_c) \quad (3.26)$$

Si ξ diverge comme une puissance dont l'exposant est ν (pour $K \rightarrow K_c$), *i.e.* ;

$$\xi(K) \sim (K - K_c)^{-\nu} \quad , \quad \text{pour} \quad K \sim K_c \quad (3.27)$$

alors ,

$$\frac{\xi[R(K)]}{\xi[K]} = \frac{[R(K) - R(K_c)]^{-\nu}}{[K - K_c]^{-\nu}} = \left(\frac{\lambda(K - K_c)}{K - K_c} \right)^{-\nu} = \lambda^{-\nu} \quad (3.28)$$

Avec (3.24), on en conclut que :

$$\lambda^{-\nu} = 1/2 \quad \implies \quad \nu = \frac{\ln 2}{\ln \lambda} \quad (3.29)$$

Connaissant λ , on peut calculer l'exposant critique [Hu ; 1982].

Comme on le voit, l'idée de Kadanoff ne donne pas seulement une méthode systématique pour réduire le nombre de degrés de liberté , mais fournit aussi une explication de la manière dont une fonction analytique $R(K)$ peut générer un comportement non-analytique pour $\xi(K)$ à $R(K_c) = K_c$. Malheureusement, la fonction $R(K)$ est inconnue, Cette mission inachevée de Kadanoff est menée à terme par le groupe de renormalisation mis au point par Wilson en 1971 [Wilson ; 1971 a-b].

3.2.2 Enoncé formel

Nous allons ici énoncer plus formellement la méthode du GR (en relation avec les systèmes de spins). Supposons que notre système, défini sur un réseau de pas a , soit décrit par le hamiltonien $\mathcal{H}(s)$ avec l'ensemble des variables statistiques noté par s . Soit $\sum_{\{s\}}$ la somme sur tous les états du système. Sous une transformation d'échelle $a \rightarrow \lambda a$, on définit une transformation $T(s', s)$ entre les nouvelles variables s' et les anciennes s , de sorte que le nouveau hamiltonien $\mathcal{H}'(s')$ soit donné par [Hu ; 1982] :

$$\exp[\mathcal{H}'(s')] = \sum_{\{s\}} \exp[T(s', s) + \mathcal{H}(s)] \quad (3.30)$$

Afin que la fonction de partition soit invariante, on impose la condition :

$$\sum_{\{s'\}} e^{T(s', s)} = 1 \quad (3.31)$$

$$\Rightarrow Z[\mathcal{H}] \equiv \sum_{\{s\}} e^{-\mathcal{H}/k_B T} = \sum_{\{s'\}} e^{-\mathcal{H}'/k_B T} \equiv Z[\mathcal{H}'] \quad (3.32)$$

Notons ici que les hamiltoniens \mathcal{H} et \mathcal{H}' sont de forme générale. Si l'on inclut le facteur $1/k_B T$ dans la définition des constantes de couplage, les hamiltoniens réduits seront :

$$\bar{\mathcal{H}}(\mathbf{K}, \{s\}, N) = K_0 + K_1 \sum_i s_i + K_2 \sum_{\langle ij \rangle}^{(1)} s_i s_j + K_3 \sum_{\langle ij \rangle}^{(2)} s_i s_j + K_4 \sum_{\langle ijk \rangle}^{(1)} s_i s_j s_k + \dots \quad (3.33)$$

et une définition semblable pour $\bar{\mathcal{H}}'(\mathbf{K}', \{s'\}, N')$, avec $N' < N$. Ici, \mathbf{K} est un vecteur infini contenant toutes les constantes de couplages et $\sum^{(i)}$ signifie une sommation sur les i^{eme} plus proches voisins. Pour le modèle d'Ising, $K_0 = 0$, $K_1 = -\beta h$ et $K_2 = -\beta J$, alors que $K_3 = K_4 = \dots = 0$. $\bar{\mathcal{H}}'$ aura la même forme que $\bar{\mathcal{H}}$, avec cependant des constantes \mathbf{K}' différentes :

$$\mathcal{H}' = R_\lambda(\mathcal{H}) \quad (3.34)$$

R_λ est appelée une transformation du groupe de renormalisation (TGR) pour un facteur d'échelle λ . Le hamiltonien étant représenté par ses constantes de couplage \mathbf{K} , on aura :

$$\mathbf{K}' = R_\lambda(\mathbf{K}) \quad (3.35)$$

qui définit un ensemble de relations de récurrence. \mathbf{K} et \mathbf{K}' sont des vecteurs appartenant à l'espace de toutes les valeurs possibles des constantes de couplage, *i.e.* un *espace des paramètres*. Un système physique à une température donnée correspond à un point dans l'espace des paramètres. La TGR R_λ est une transformation dans l'espace

des paramètres : elle transforme un point \mathbf{K} en un autre point \mathbf{K}' [Le Bellac ; 1988]. Soient deux changements d'échelle consécutifs λ_1 et λ_2 . Alors ,

$$\mathbf{K}' = R_{\lambda_2} [R_{\lambda_1}(\mathbf{K})] = R_{\lambda}(\mathbf{K}) \quad (3.36)$$

définit un nouveau changement d'échelle $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$ [Hu ; 1982]. Donc,

$$R_{\lambda^n} = (R_{\lambda})^n \quad (3.37)$$

$$Z[\mathbf{K}'] = Z[R_{\lambda}(\mathbf{K})] \quad (3.38)$$

Notons que les équations de récurrence (3.35) sont en général non-linéaires. Par exemple, pour le modèle d'Ising en 2-D sur un réseau carré , on trouve (voir §3.3.3) :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}} &= K_1 \sum_i s_i + K_2 \sum_{\langle ij \rangle}^{(1)} s_i s_j \\ \bar{\mathcal{H}}' &= K'_0 + K'_1 \sum_i s'_i + K'_2 \sum_{\langle ij \rangle}^{(1)} s'_i s'_j + K'_3 \sum_{\langle ij \rangle}^{(2)} s'_i s'_j + \dots \end{aligned}$$

$\bar{\mathcal{H}}'$ est différent de $\bar{\mathcal{H}}$; en plus des interactions entre plus proches voisins, il y a un terme constant K'_0 , des interactions entre deuxièmes plus proches voisins, etc. Pour les développements ultérieurs, on doit faire deux hypothèses [Le Bellac ; 1988] :

H 3.1 *Les coefficients $\mathbf{K} = (K_0, K_1, K_2, \dots)$ sont des fonctions analytiques de la température même à $T = T_c$, et les $\mathbf{K}' = (K'_0, K'_1, K'_2, \dots)$ sont des fonctions analytiques des \mathbf{K} .*

H 3.2 *Les TGR n'introduisent pas de couplage à longue distance, i.e. de coefficients couplant fortement des spins éloignés : le couplage entre spins éloignés doit décroître plus vite que toute puissance inverse de la distance entre ces spins.*

Ces deux hypothèses sont raisonnables, du fait que la transformation (3.35) est locale dans l'espace (il y a un nombre fini de spins par bloc), mais les conditions générales de validité de ces hypothèses ne sont pas connues. D'autre part, certaines transformations peuvent introduire des interactions à longue portée : ce sont en réalité des artefacts de la méthode particulière utilisée [Le Bellac ; 1988].

Donc, une TGR est une transformation d'échelle qui laisse la fonction de partition invariante, tout en changeant la forme et l'intensité des interactions. Les propriétés thermodynamiques du système étant gouvernées par la fonction de partition, la physique se trouve préservée. Pour finir, il convient de faire quelques remarques.

1. Formellement, le *groupe de renormalisation* est un semi-groupe. La notion de groupe de renormalisation a été introduite dans le cadre des divergences de la théorie quantique des champs : au départ, le groupe de renormalisation exprimait l'invariance de la physique par rapport aux diverses procédures de renormalisation. On peut considérer cette version du groupe de renormalisation comme un cas particulier de celle introduite par Wilson en 1971 et que l'on vient de décrire.
2. Dans certains ouvrages [Niemeijer et van Leeuwen ; 1976] ou [LeBellac ; 1988], on définit autrement le hamiltonien renormalisé . Au lieu de (3.30), on a :

$$\exp[G + \mathcal{H}'(s')] = \sum_{\{s\}} P(s', s) \exp[\mathcal{H}(s)] \quad (3.39)$$

avec

$$P(s', s) \geq 0, \quad \forall s', s \quad \text{et} \quad \sum_{\{s'\}} P(s', s) = 1 \quad (3.40)$$

En comparant cette dernière relation avec (3.31), on identifie

$$e^{T(s', s)} = P(s', s)$$

La constante G , qui est indépendante des configurations $\{s'\}$ est définie en imposant la condition suivante :

$$\sum_{\{s'\}} \mathcal{H}'(s') = 0 \quad (3.41)$$

Les restrictions sur $P(s', s)$ garantissent que le côté droit de (3.39) est positif et donc que G et $\mathcal{H}'(s')$ sont des quantités réelles. Avec ces définitions, on calcule le résultat suivant :

$$\begin{aligned} G + F' &= \ln \sum_{\{s'\}} \exp[G + \mathcal{H}'(s')] = \ln \sum_{\{s'\}} \sum_{\{s\}} P(s', s) \exp[\mathcal{H}(s)] = \ln \sum_{\{s\}} \exp[\mathcal{H}(s)] \\ &= F \end{aligned} \quad (3.42)$$

i.e. que l'énergie libre est préservée, à une constante près. Cette constante G provient de l'intégration sur les courtes longueurs d'onde. Il s'agit donc de *fixer* le niveau fondamental de l'énergie libre avec la condition (3.41). Mais ceci ne change rien au comportement critique, puisque G est une fonction "régulière" [Ma ; 1982]. On remarquera cependant que G est contenu de façon implicite dans (3.30) ; cela correspond à notre K'_0 dans (3.33).

Voyons maintenant comment on peut calculer les exposants critiques à partir de la théorie du groupe de renormalisation.

3.2.3 Calcul des exposants critiques

Cette section est divisée en deux. En premier, on s'intéressera aux surfaces critiques et aux points fixes. Ensuite, on examinera le comportement des TGR au voisinage d'un point fixe et on déterminera la technique pour calculer les exposants critiques.

A. Surface critique et points fixes

Bien que l'on considère le modèle d'Ising en 2-D, la discussion qui va suivre est générale [Le Bellac ; 1988]. Dans l'espace des paramètres, le modèle d'Ising pur ($H = 0$) est représenté par

$$K_2 \neq 0, \quad K_0 = K_1 = K_3 = K_4 = \dots = 0$$

Quand T varie, le point \mathbf{K} représentant le modèle d'Ising décrit une courbe dans l'espace des paramètres, appelée *ligne physique du modèle d'Ising*. Pour une certaine valeur $T_c = 2,27J$, le modèle subit une transition de phase du deuxième ordre ($\xi \rightarrow \infty$) ; dans l'espace des paramètres, cela équivaut à $K_2 = K_{2c} \simeq 0,44$. Situons notre modèle au point critique, *i.e.* $\mathbf{K} = (0, 0, K_{2c}, 0, \dots)$. Si l'on applique une TGR telle que $a \rightarrow \lambda a$, la longueur de corrélation ξ' est encore infinie ($\xi' = \xi/\lambda$) : le système renormalisé est encore critique. L'ensemble des points, dans l'espace des paramètres, correspondant à des systèmes au point critique ($\xi = \infty$) est appelé *surface (ou variété) critique* S_∞ . L'application d'une TGR à un point $\in S_\infty$ redonne un point de S_∞ . Puisque $\xi = \infty$, \forall points $\in S_\infty$, on se restreint à des transitions du second ordre (ou d'ordre supérieur).

Examinons le comportement de divers points de la ligne physique [voir la figure 3.2]. Si l'on prend un système qui n'est pas au point critique ($\xi \neq \infty$: ce qui équivaut à un point Q de la ligne physique tel que $Q \notin S_\infty$), les TGR $Q \rightarrow Q' \rightarrow Q'' \dots$ vont progressivement éloigner le point de la surface critique, car à chaque opération ξ est divisée par λ , ce qui correspond à des systèmes de plus en plus éloignés de la région critique. Les trajectoires décrites par les points représentatifs par l'application successive d'une TGR forme le *flot de renormalisation*. Donc, tous les points d'une trajectoire correspondent à un même comportement à grande distance (en faisant abstraction de la dilatation de l'unité de longueur et du spin). Pour un point $P \in S_\infty$, le comportement des points $P', P'', \dots, P^{(n)}$ obtenus par itérations successives de la TGR pourrait être complètement arbitraire. En effet, le système dynamique ainsi obtenu pourrait avoir des points doubles, des cycles limites, etc. (voir le chapitre 5). Cependant, le cas physiquement intéressant est celui où la suite $P \rightarrow P' \rightarrow P'' \rightarrow \dots P^{(n)} \rightarrow \dots$ converge vers un point fixe P^* tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = P^*$. A P^* correspond un ensemble de

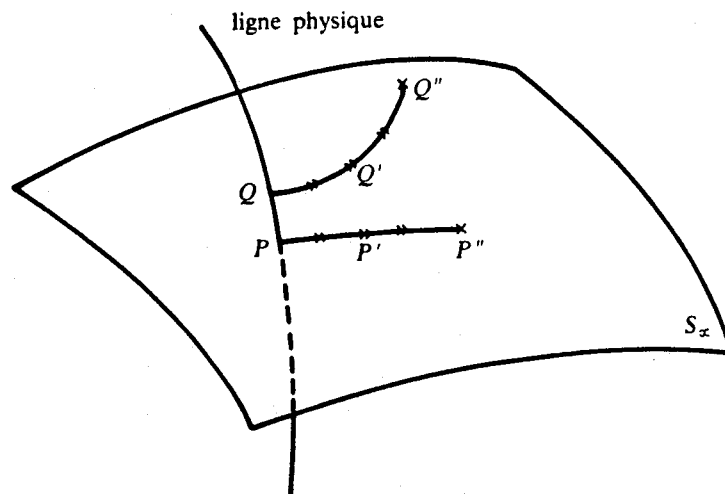


Figure 3.2: Evolution d'une TGR ; (i) $P \in S_\infty$: P' , transformé de P , appartient aussi à S_∞ , (ii) $Q \notin S_\infty$: Q', Q'', \dots , s'éloignent de S_∞ [Le Bellac ; 1988].

paramètres \mathbf{K}^* tels que (3.35) donne [Le Bellac ; 1988] :

$$R_\lambda(\mathbf{K}^*) = \mathbf{K}^* \quad (3.43)$$

Plus précisément, il existe sur S_∞ un domaine (ou bassin) d'attraction $\mathcal{D}(P^*)$ du point fixe tel que si $P \in \mathcal{D}(P^*)$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = P^*$. Il peut exister plusieurs points fixes avec chacun son bassin d'attraction. Un point fixe peut aussi être rejeté à l'infini (voir le chapitre 6). Présentement, on ne connaît pas de condition générale pour l'existence de points fixes et de leur domaine d'attraction. On fera l'hypothèse suivante :

H 3.3 Si $P \in S_\infty$ et que l'on effectue un grand nombre d'itérations de la TGR, $P^{(n)}$ converge vers un point fixe $P^* \in S_\infty$ qui vérifie $R_\lambda(\mathbf{K}^*) = \mathbf{K}^*$. Il peut éventuellement exister plusieurs points fixes, et à chacun d'entre eux correspond un domaine d'attraction.

Avant de terminer ce sujet, quelques remarques s'imposent [Le Bellac ; 1988] :

1. La position du point fixe dépend en général de la forme particulière de la TGR. Les résultats physiques, *i.e.* les exposants critiques, pour leur part, doivent être indépendants de la forme de la TGR choisie.
2. Un point fixe isolé donne des exposants critiques uniques. On peut aussi avoir des lignes (ou des surfaces) de points fixes. Dans ce cas les exposants critiques dépendent de façon continue de paramètres comme la température.

B. Exposants critiques

Soient $\mathbf{K} = \{K_\alpha\}$, $\mathbf{K}^* = \{K_\alpha^*\}$ et $\mathbf{K}' = \{K'_\alpha\}$. D'après H 3.1, l'équation $\mathbf{K}' = R_\lambda(\mathbf{K})$ peut être linéarisée au voisinage du point fixe. Si \mathbf{K} est proche de \mathbf{K}^* dans l'espace des paramètres, on peut écrire $K_\alpha = K_\alpha^* + \delta K_\alpha$ et linéariser \mathbf{K}' près de \mathbf{K}^* [Le Bellac ; 1988]

$$K'_\alpha = K_\alpha^* + \sum_{\beta} (K_\beta - K_\beta^*) \left. \frac{\partial K'_\alpha}{\partial K_\beta} \right|_{\mathbf{K}^*} + \mathcal{O}(\mathbf{K} - \mathbf{K}^*)^2$$

Donc, $\delta K'_\alpha \equiv K'_\alpha - K_\alpha^*$, peut être écrit, au premier ordre, comme :

$$\delta K'_\alpha = \sum_{\beta} T_{\alpha\beta} \delta K_\beta \quad \text{avec} \quad T_{\alpha\beta} \equiv \left. \frac{\partial K'_\alpha}{\partial K_\beta} \right|_{\mathbf{K}^*} \quad (3.44)$$

La matrice $T_{\alpha\beta}$ n'est en général pas symétrique, et il n'y a aucune garantie que ses valeurs propres soient réelles et que ses vecteurs propres forment un ensemble complet. On va néanmoins faire l'hypothèse que tout va bien de ce côté. Donc, soient λ_i les valeurs propres de $T_{\alpha\beta}$, $\phi_\alpha^{(i)}$ et $\psi_\alpha^{(i)}$ les vecteurs propres gauche et droit correspondant :

$$\sum_{\alpha} \phi_\alpha^{(i)} T_{\alpha\beta} = \lambda_i \phi_\beta^{(i)} \quad \text{et} \quad \sum_{\beta} T_{\alpha\beta} \psi_\beta^{(i)} = \lambda_i \psi_\alpha^{(i)} \quad (3.45)$$

Définissons les *coordonnées normales* [Hu ; 1982] :

$$u_i = \sum_{\alpha} \phi_\alpha^{(i)} \delta K_\alpha \quad (3.46)$$

de sorte que les équations aux valeurs propres soient découplées :

$$u'_i \equiv \sum_{\alpha} \phi_\alpha^{(i)} \delta K'_\alpha = \lambda_i \sum_{\beta} \phi_\beta^{(i)} \delta K_\beta = \lambda_i u_i \quad (3.47)$$

On peut alors projeter tout point de l'espace des paramètres sur la base $\{\phi^{(i)}\}$:

$$\delta K_\beta = \sum_i u_i \phi_\beta^{(i)} \quad \Longrightarrow \quad \delta K'_\alpha = \sum_i \lambda_i u_i \phi_\alpha^{(i)} \quad (3.48)$$

La coordonnée normale u_i est appelée *champ (ou variable) d'échelle (scaling field)* [Le Bellac ; 1988]. De (3.47) et (3.48), il vient :

$$u_i^{(n)} = \lambda_i^n u_i \quad (3.49)$$

où $u_i^{(n)}$ est le résultat de n applications de R_λ . Il faut donc distinguer trois cas :

1. $\lambda_i > 1$: u_i croît lorsque l'on itère les TGR ; u_i est dit *champ essentiel (relevant)*.

2. $\lambda_i = 1$: u_i demeure constant à l'approximation linéaire. Pour connaître son comportement, il faut améliorer l'approximation ². Un tel champ est dit *marginal*.
3. $\lambda_i < 1$: u_i décroît avec l'application des TGR ; u_i est alors *inessentiel (irrelevant)*.

Notons que les champs essentiels, marginaux et inessentiels sont définis par rapport à un point fixe particulier [Le Bellac ; 1988].

Afin de bien comprendre ce que signifie essentiel et inessentiel, considérons un système qui se situerait sur une "courbe-propre", *i.e.* qu'un seul champ u serait suffisant : le système se trouve alors sur u_1 ou u_2 [figure 3.3]. Supposons que $\lambda_1 > 1$ et $\lambda_2 < 1$. Tout système se trouvant sur u_2 est critique, car l'itération de la TGR aura pour effet d'amener le système à \mathbf{K}^* ; $u_i \rightarrow 0 \Rightarrow \delta K_\alpha \rightarrow 0$. On dit d'un tel système qu'il "démontre son universalité". Au contraire, pour un point sur u_1 (sauf \mathbf{K}^*), l'itération de la TGR éloignera le système de \mathbf{K}^* . Le fait que l'on s'éloigne du point critique est à l'origine de l'appellation essentiel et le vecteur propre est associé à une quantité physique qui mesure la distance du système au point critique (la température ou le champ magnétique externe par exemple). Comme le montre la figure 3.3, les points extérieurs aux "courbes-propres" n'atteindront jamais le point fixe sous itérations de la TGR. Ce graphe illustre le flot de renormalisation [Reichl ; 1987].

Nous allons supposer ici qu'il n'y a pas de champ marginal (leur traitement étant plus compliqué [LeBellac ; 1988]). D'après (3.46), $u_i = 0 \forall i$ lorsque l'on se trouve au point fixe ($\delta K_\alpha = 0$). Les vecteurs $\phi_\alpha^{(i)}$ sous-tendent donc un espace vectoriel dont l'origine coïncide avec le point fixe \mathbf{K}^* . A l'approximation linéaire, il nous faut fixer N

²La seconde approximation consiste à garder le terme quadratique du développement de Taylor : [Niemeijer et van Leeuwen ; 1976]

$$\delta K'_\alpha \simeq \sum_{\beta} T_{\alpha\beta} \delta K_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma} T_{\alpha\beta\gamma} \delta K_\beta \delta K_\gamma$$

avec

$$T_{\alpha\beta} \equiv \left. \frac{\partial K'_\alpha}{\partial K_\beta} \right|_{\mathbf{K}} \quad \text{et} \quad T_{\alpha\beta\gamma} \equiv \left. \frac{\partial^2 K'_\alpha}{\partial K_\beta \partial K_\gamma} \right|_{\mathbf{K}}.$$

Alors, les champs d'échelle sont :

$$u_i = \sum_{\alpha} \phi_\alpha^{(i)} \delta K_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \phi_{\alpha\beta}^{(i)} \delta K_\alpha \delta K_\beta$$

où

$$\phi_{\beta\nu}^{(i)} = \sum_{j,k} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j \lambda_k} \sum_{\gamma,\alpha,\beta} \phi_\gamma^{(i)} T_{\gamma\alpha\beta} \psi_\alpha^{(j)} \psi_\beta^{(k)} \phi_\beta^{(j)} \phi_\nu^{(k)}$$

avec $\lambda_j \lambda_k \neq \lambda_i$. Alors, (3.49) est encore valide : $u'_i = \lambda_i u_i$.

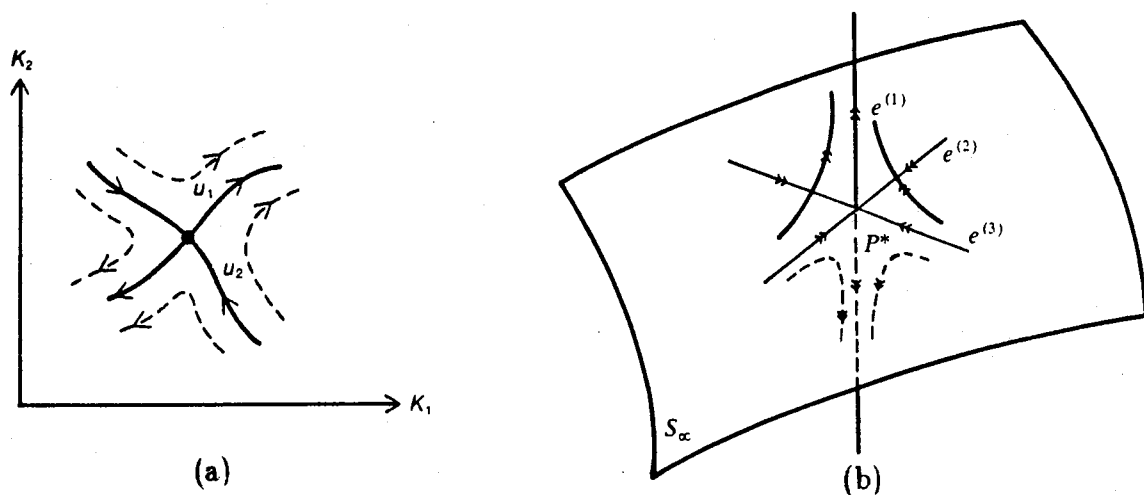


Figure 3.3: Flot de renormalisation (a) pour deux champs d'échelle : u_1 (essentiel) et u_2 (inessentiel) [Reichl ; 1987] ; (b) pour trois champs [Le Bellac ; 1988].

paramètres $u_1 = u_2 = \dots = u_N = 0$ (pour N champs essentiels) afin de se retrouver sur la surface S_∞ . En effet, si $u_i \neq 0$ (et $\lambda_i > 1$), les itérations de la TGR éloigneront le point représentatif de \mathbf{K}^* (si u_i augmente alors δK_α augmente et on s'éloigne de \mathbf{K}^*), et le point de départ ne fait alors pas partie de S_∞ . Inversement, si les N champs essentiels $u_1 = u_2 = \dots = u_N = 0$, le point de départ se trouve nécessairement sur S_∞ , plus précisément à \mathbf{K}^* . Notons que cette condition ($u_i = 0$) n'est nécessaire que pour les champs essentiels ; pour les champs inessentiels, $\lambda_i < 1$ et les itérations de la TGR auront pour effet de faire tendre u_i vers zéro et donc vers la surface critique. Donc, l'hyperplan $u_1 = u_2 = \dots = u_N = 0$ est le plan tangent à la surface critique au point critique, dans le cadre de l'approximation linéaire [Le Bellac ; 1988].

Le cas où la variation d'un seul paramètre (la température) permet de se placer sur S_∞ est très important ; il correspond aux transitions du deuxième ordre : ces transitions sont décrites par une situation où il n'existe qu'un seul champ essentiel au point fixe considéré . Le cas correspondant à l'existence de deux champs essentiels nous donne les points tricritiques ; ceux-ci sont obtenus en fixant deux paramètres (par exemple la température et la pression). La généralisation à des points polycritiques d'ordre N est évidente : il faut N champs essentiels [Le Bellac ; 1988]. La figure 3.3 illustre le cas d'une transition du deuxième ordre : il n'y a qu'un seul champ essentiel (u_1 avec $\lambda_1 > 1$) et deux champs inessentiels (u_2 et u_3 avec $\lambda_2, \lambda_3 < 1$). Comme on le voit, les doubles-flèches montrent le déplacement sous l'itération de la TGR. Les trois vecteurs de base $\phi_\alpha^{(i)}$ [$e^{(i)}$ sur la figure] définissent un plan tangent à S_∞ en $P^* = \{\mathbf{K}^*\}$.

Maintenant que l'on possède une vue géométrique du problème, voyons le calcul explicite des exposants critiques. Si l'on considère des quantités réduites (*i.e.* incluant le terme $-1/k_B T$), l'énergie libre est [d'après (2.3)] :

$$F \equiv -\frac{A}{k_B T} = \ln \sum_{\{s\}} e^{-\chi(s)/k_B T} = \ln \sum_{\{s\}} e^{\bar{\chi}(s)} \quad (3.50)$$

Donc,

$$F(\mathbf{K}) = \ln \sum_{\{s\}} e^{\bar{\chi}(s)} \quad \text{et} \quad F'(\mathbf{K}') = \ln \sum_{\{s'\}} e^{\bar{\chi}'(s')} \quad (3.51)$$

D'après (3.32), on a :

$$F'(\mathbf{K}') = F(\mathbf{K}) \quad (3.52)$$

Or, à la limite thermodynamique, on écrit l'énergie libre par site comme

$$f(\mathbf{K}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} F(\mathbf{K}) \quad (3.53)$$

Puisque $Z(\mathbf{K}) = Z(\mathbf{K}')$, $f(\mathbf{K})$ et $f'(\mathbf{K}')$ doivent avoir la même forme fonctionnelle [Niemeijer et van Leeuwen ; 1976] :

$$F(\mathbf{K}) = N f(\mathbf{K}) \quad \text{et} \quad F'(\mathbf{K}') = N' f(\mathbf{K}') \quad (3.54)$$

où N est le nombre de sites et N' le nombre de blocs du système. Portant (3.54) dans (3.52), il vient : $f(\mathbf{K}) = \frac{N'}{N} f(\mathbf{K}')$. Or, dans une cellule de côté L , il y a L^d sites, de sorte que le nombre de blocs est N/L^d , *i.e.* $N' = NL^{-d}$. Alors, on aura simplement : $f(\mathbf{K}) = L^{-d} f(\mathbf{K}')$. Ainsi, la partie singulière de f se comporte comme :

$$f_s(\mathbf{K}) = L^{-d} f_s(\mathbf{K}') \quad (3.55)$$

On peut réécrire cette équation en fonction des champs d'échelle. Alors,

$$f_s(u_1, u_2, \dots) = L^{-d} f_s(\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots) \quad (3.56)$$

C'est une fonction homogène généralisée. Si l'on pose $u_2 = u_3 = \dots = 0$, f_s ne dépendra que d'une variable. Avec (3.5) et (3.6), on écrit :

$$\begin{aligned} f_s(u_1) &= f_s(1) u_1^{a_1} \\ f_s(\lambda_1 u_1) &= f_s(1) (\lambda_1 u_1)^{a_1} \end{aligned}$$

(3.56) donne alors

$$f_s(1) u_1^{a_1} = L^{-d} f_s(1) (\lambda_1 u_1)^{a_1}$$

d'où

$$a_1 = d \frac{\ln L}{\ln \lambda_1} \quad (3.57)$$

Pour le cas de deux champs ($u_3 = u_4 = \dots = 0$), (3.56) est similaire à (3.10), *i.e.*

$$f_s(\epsilon, H) = \lambda^{-1} f_s(\lambda^p \epsilon, \lambda^q H)$$

En comparant avec (3.56), on fait l'identification suivante :

$$\begin{cases} \lambda = L^d \\ \lambda_1 = \lambda^p = (L^d)^p \\ \lambda_2 = \lambda^q = (L^d)^q \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \epsilon = u_1 \\ H = u_2 \end{cases}$$

On trouve alors

$$p = \frac{\ln \lambda_1}{d \ln L} \quad \text{et} \quad q = \frac{\ln \lambda_2}{d \ln L} \quad (3.58)$$

Substituant ces deux expressions dans les relations de §3.1.2 et §3.1.3, on peut calculer tous les exposants critiques dans le cadre de l'approximation linéaire [Reichl ; 1987].

Donc, une fois connue la TGR, on peut déterminer \mathbf{K}^* et $T_{\alpha\beta}$, ainsi que λ_1 et λ_2 , de sorte que les exposants critiques sont aussi connus. Voyons maintenant comment on détermine une TGR.

3.3 Applications

Dans cette section, on montrera quelques exemples de calculs permettant de déterminer une TGR. Mais d'abord, il faut expliciter un peu la forme de $T(s', s)$, ou si l'on veut de $P(s', s)$. En utilisant les notations précédentes, on peut écrire :

$$P(s', s) = \prod_I \delta(S'_I - f(s_i)|_{i \in I}) \quad (3.59)$$

Si la configuration $\{s\}$ est fixée, il n'existe qu'une seule configuration $\{s'\}$ pour laquelle le delta de Kronecker est non-nul (ou le delta de Dirac pour le cas continu), de sorte que la condition (3.31) [ou (3.40)] est satisfaite :

$$\sum_{\{s'\}} P(s', s) = \sum_{\{s'\}} \prod_I \delta(S'_I - f(s_i)|_{i \in I}) = 1 \quad (3.60)$$

Les différentes TGR proviennent du choix particulier de $P(s', s)$, lui-même dépendant de la fonction $f(s_i)$. Un choix trivial serait [Niemeijer et van Leeuwen ; 1976]

$$P(s', s) = 2^{N'} \quad (3.61)$$

Alors, le côté droit de (3.30) est indépendant de s' et $\mathcal{H}'(s')$ est une constante égale à K'_0 ; il n'y a plus de dépendance en fonction des configurations. Pour (3.39), cela signifie que $\mathcal{H}' = 0$ et $F = G$. Il y a deux approches principales au problème [Kadanoff ; 1976] :

1. Une transformation de "décimation" (*decimation*) dans laquelle la sommation ne s'effectue que sur certaines variables s de $\{s\}$; les s n'étant pas affectés par la somme forment les nouvelles variables $\{s'\}$.
2. Une transformation de bloc dans laquelle $P(s', s)$ couple les nouvelles variables $\{s'\}$ aux anciennes $\{s\}$; cela correspond à l'approche décrite en §3.2.

Notons qu'il existe des TGR faisant appel aux deux approches [Kadanoff ; 1976].

3.3.1 Décimation

Dans ce cas, le nouveau réseau est constitué des variables de l'ancien réseau qui n'ont pas été sommées, de sorte que $f(s_i)$ s'écrit simplement comme [Le Bellac ; 1988] :

$$f(s_i)|_{i \in I} = s_I \quad (3.62)$$

d'où ;

$$P(s', s) = \prod_I \delta(S'_I - s_I) \quad (3.63)$$

Appliquons cette approche au modèle d'Ising pur, en une et deux dimensions.

A. $d=1$

Si l'on suppose une chaîne d'Ising de spins $\sigma = \pm 1$ localisés aux sites $x_k = ka$ d'un réseau (a : pas du réseau ; $k = 0, 1, 2, \dots$) , les interactions entre plus proches voisins seulement sont décrites par le hamiltonien [Kadanoff ; 1976] :

$$\mathcal{H}(\sigma) = K \sum_k \sigma_k \sigma_{k+1} \quad , k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.64)$$

Décimons maintenant la chaîne en sommant sur certains spins. La nouvelle chaîne est formée par les spins μ non-sommés [voir la figure 3.4]. Si λ désigne le changement d'échelle, il y aura $m = \lambda - 1$ spins entre les deux spins μ , et le hamiltonien sera :

$$\mathcal{H}'(\mu) = K' \sum_j \mu_j \mu_{j+1} \quad , j = 0, 1, 2, \dots, N/\lambda$$

L'équation (3.30) donne :

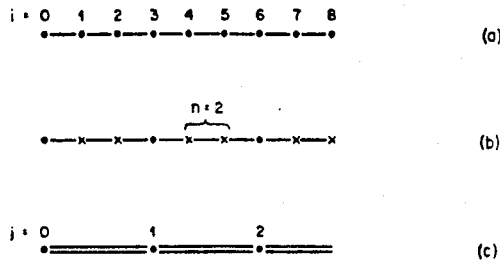


Figure 3.4: Décimation en une dimension. (a) montre le réseau initial ; (b) la sommation ; et (c) le réseau résultant [Kadanoff ; 1976].

$$\begin{aligned}
 e^{\lambda'(\mu)} &= \exp \left[K' \sum_j \mu_j \mu_{j+1} \right] = \prod_j e^{K' \mu_j \mu_{j+1}} \\
 &= \sum_{\{\sigma\}} \prod_l \delta(\mu_l - \sigma_l) e^{\lambda(\sigma)} = \sum_{\{\sigma\}} \prod_l \delta(\mu_l - \sigma_l) \prod_k e^{K \sigma_k \sigma_{k+1}}
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Pour le cas de l'interaction entre deux spins μ seulement (*i.e.* pour un certain j , disons $j = 0$), (3.65) donne, si l'on choisit $\lambda = 3$ (par exemple) :

$$\prod_j e^{K' \mu_j \mu_{j+1}} \rightarrow e^{K' \mu_0 \mu_1} \quad \text{et} \quad \prod_k e^{K \sigma_k \sigma_{k+1}} \rightarrow e^{K \sigma_0 \sigma_1} e^{K \sigma_1 \sigma_2} e^{K \sigma_2 \sigma_3}$$

Puisque $\lambda = 3$, alors il y a $m = \lambda - 1 = 2$ spins σ entre μ_1 et μ_2 et les seuls spins σ pouvant interagir avec les μ sont ceux situés entre eux ; c'est pourquoi on garde $k = 0, 1, 2$ [$k = 3$ sera pour μ_1 et μ_2 , $k = 6$ pour μ_2 et μ_3 , etc.]. Aussi,

$$\prod_j \delta(\mu_j - \sigma_j) \Rightarrow \sigma_j = \mu_j$$

i.e. que les σ correspondant aux μ doivent être égaux aux μ ; dans notre cas, cela équivaut à $\sigma_0 = \mu_0$ et $\sigma_3 = \mu_1$. Alors, (3.65) donne (pour deux spins μ seulement):

$$e^{K' \mu_0 \mu_1} = \sum_{\{\sigma\}} e^{K \mu_0 \sigma_1} e^{K \sigma_1 \sigma_2} e^{K \sigma_2 \mu_1} \quad \text{où} \quad \sum_{\{\sigma\}} = \sum_{\sigma_1 \pm 1} \sum_{\sigma_2 \pm 1} \sum_{\sigma_3 \pm 1}$$

Donc, pour deux spins μ et μ' et un facteur λ donné, on aura :

$$e^{K' \mu \mu'} = \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \dots \sum_{\sigma_m = \pm 1} e^{K \mu \sigma_1} e^{K \sigma_1 \sigma_2} \dots e^{K \sigma_m \mu'} \tag{3.66}$$

avec $m = \lambda - 1$. Calculons la TGR pour le cas $\lambda = 2$ ($m = 1$). Alors, (3.66) devient :

$$e^{K'\mu\mu'} = \sum_{\sigma_1=\pm 1} e^{K\mu\sigma_1} e^{K\sigma_1\mu'} = \sum_{\sigma_1=\pm 1} e^{K(\mu+\mu')\sigma_1} = 2 \cosh [K(\mu + \mu')] \quad (3.67)$$

Pour calculer la TGR, deux spins μ et μ' seulement sont nécessaires. Puisqu'il y a deux possibilités pour l'alignement des spins [parallèles ($\uparrow\uparrow$) ou anti-parallèles ($\uparrow\downarrow$)], (3.67) nous donne le système suivant :

$$\begin{aligned} e^{K'} &= 2 \cosh 2K, & \text{pour } \uparrow\uparrow \\ e^{-K'} &= 2, & \text{pour } \uparrow\downarrow \end{aligned} \quad (3.68)$$

De ces équations on tire :

$$e^{K'} - e^{-K'} = 2 [\cosh 2K - 1] \quad \text{et} \quad e^{K'} + e^{-K'} = 2 [\cosh 2K + 1] \quad (3.69)$$

d'où ;
$$\tanh K' = \frac{e^{K'} - e^{-K'}}{e^{K'} + e^{-K'}} = \frac{\cosh 2K - 1}{\cosh 2K + 1} = \frac{2 \sinh^2 K}{2 \cosh^2 K} = \tanh^2 K$$

Donc, la TGR est simplement :

$$K' = \tanh^{-1} (\tanh K)^2 \quad (3.70)$$

Notons que pour un λ quelconque, on trouvera [Hu ; 1982] :

$$K' = \tanh^{-1} (\tanh K)^\lambda \quad (3.71)$$

Il est à noter que le nouvel hamiltonien $\mathcal{H}'(\mu)$ a la même forme que l'ancien. Ceci n'est généralement pas le cas (voir §3.2.2).

B. $d=2$

Dans ce cas-ci, on suppose un réseau carré. La décimation se fait en sommant un spin sur deux et de manière alternée, d'une ligne à l'autre (voir la figure 3.5). Ici, $\{\sigma\}$ représente les anciennes variables et $\{\mu\}$ les nouvelles. On peut écrire la fonction de partition comme [Kadanoff et Houghton ; 1975] :

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} Z\{\sigma\} = \sum_{\{\mu\}} Z\{\mu\} \quad \text{avec} \quad Z\{\sigma\} \equiv \exp[\mathcal{H}(\sigma)] \quad (3.72)$$

Donc, le hamiltonien (3.33) peut s'écrire :

$$\mathcal{H}(\sigma) \equiv \sum_i K_i S_i\{\sigma\} = \ln Z\{\sigma\} \quad \text{avec} \quad S_i = \sum_{\mathbf{r}} s_i(\mathbf{r}) \quad (3.73)$$

où les S_i sont des fonctions "extensives" des spins σ . Ils sont représentés sous la forme d'une somme sur les sites du réseau dans (3.73). Par exemple, s_1 peut être $\sigma_{\mathbf{r}}$, s_2 un

produit entre plus proches voisins, etc. Pour la décimation, $P(s', s) = P(\mu, \sigma)$ est telle que $\mu_{\mathbf{r}'} = \sigma_{\mathbf{r}'}$ et, après la sommation, les σ sont "enlevés". Donc (3.30) donne :

$$Z'\{\mu\} = \sum_{\{\sigma\}} P(\mu, \sigma) Z\{\sigma\} = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\mathbf{r}'} \delta(\mu_{\mathbf{r}'} - \sigma_{\mathbf{r}'}) Z\{\sigma\} = \left(\sum_{\{\sigma_{\mathbf{r}'}\}} Z\{\sigma_{\mathbf{r}'}\} \right)_{\sigma_{\mathbf{r}'} = \mu_{\mathbf{r}'}}$$

d'où ,

$$\mathcal{H}'(\mu) = \ln Z'\{\mu\} = \ln \left(\sum_{\{\sigma_{\mathbf{r}'}\}} Z\{\sigma_{\mathbf{r}'}\} \right)_{\sigma_{\mathbf{r}'} = \mu_{\mathbf{r}'}}$$

Donc,

$$\mathcal{H}'(\mu) = \ln \left(\sum_{\{\sigma_{\mathbf{r}'}\}} e^{\mathcal{H}(\sigma_{\mathbf{r}'})} \right)_{\sigma_{\mathbf{r}'} = \mu_{\mathbf{r}'}} \quad (3.74)$$

Pour les voisins μ les plus proches d'un σ , i.e. μ_1, \dots, μ_4 , la somme de (3.74) s'écrit comme un produit de termes de la forme [Kadanoff et Houghton ; 1975] :

$$\begin{aligned} z &= \sum_{\sigma = \pm 1} \exp [2K_0 + \sigma K_2 (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)] \\ &= 2e^{2K_0} \cosh [K_2 (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)] \end{aligned} \quad (3.75)$$

En effet, pour une "plaquette" (voir la figure 3.5), le hamiltonien (3.33) a la forme :

$$\mathcal{H}(\sigma) = K_0 + K_2 \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j = K_0 + \sigma K_2 (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)$$

Si l'on définit $\mathcal{F}(\sigma)$ comme :

$$\mathcal{F}(\sigma) \equiv 2K_0 + \sigma K_2 (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) \quad (3.76)$$

alors,

$$z = \sum_{\sigma} e^{\mathcal{F}(\sigma)}$$

De plus, on définit une valeur moyenne $\langle \rangle$ telle que :

$$\langle \sigma_{\mathbf{r}'} \rangle_{\mu} \equiv \frac{\sum_{\sigma_{\mathbf{r}'}} e^{\mathcal{F}(\sigma_{\mathbf{r}'})} \sigma_{\mathbf{r}'}}{\sum_{\sigma_{\mathbf{r}'}} e^{\mathcal{F}(\sigma_{\mathbf{r}'})}} = \tanh [K_2 (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)] \quad (3.77)$$

On peut alors écrire :

$$Z'\{\mu\} = \left(\sum_{\{\sigma_{\mathbf{r}'}\}} e^{\mathcal{H}(\sigma_{\mathbf{r}'})} \right)_{\sigma_{\mathbf{r}'} = \mu_{\mathbf{r}'}} = \prod_{\mathbf{r}'} \sum_{\sigma} e^{\mathcal{H}(\sigma)} = \prod_{\mathbf{r}'} \sum_{\sigma} e^{\mathcal{F}(\sigma)} \exp [\mathcal{H}(\sigma) - \mathcal{F}(\sigma)]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{Q} \left(\frac{\prod_{\mathbf{r}'} \sum_{\sigma} e^{\mathcal{F}(\sigma)} \exp[\mathcal{H}(\sigma) - \mathcal{F}(\sigma)]}{\mathcal{Q}} \right), \text{ avec } \mathcal{Q} \equiv \prod_{\mathbf{r}'} z(\mathbf{r}') \\
&= \mathcal{Q} \left(\frac{\prod_{\mathbf{r}'} \sum_{\sigma} e^{\mathcal{F}(\sigma)} \exp[\mathcal{H}(\sigma) - \mathcal{F}(\sigma)]}{\prod_{\mathbf{r}'} \sum_{\sigma} e^{\mathcal{F}(\sigma)}} \right) = \mathcal{Q} \langle \exp[\mathcal{H}(\sigma) - \mathcal{F}(\sigma)] \rangle_{\mu} \quad (3.78)
\end{aligned}$$

Si l'on écrit :

$$\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}_0(\sigma) + \mathcal{H}_{rem}(\sigma) \quad (3.79)$$

où $\mathcal{H}_0(\sigma)$ ne contient que les interactions entre σ et ses quatre plus proches voisins μ :

$$\mathcal{H}_0(\sigma) = \mathcal{F}(\sigma) \quad (3.80)$$

Alors, (3.78) devient :

$$Z'\{\mu\} = \mathcal{Q} \langle \exp[\mathcal{H}_{rem}(\sigma)] \rangle_{\mu} \quad (3.81)$$

Ici, $\mathcal{H}_{rem}(\sigma)$ peut être interprété comme une perturbation. D'après (3.73), on aura

$$\mathcal{H}'(\mu) = \ln Z'\{\mu\} = \ln \mathcal{Q} + \ln \langle \exp[\mathcal{H}_{rem}(\sigma)] \rangle_{\mu} = \mathcal{H}'_0(\mu) + \mathcal{H}'_1(\mu) \quad (3.82)$$

où l'on identifie

$$\mathcal{H}'_0(\mu) = \ln \mathcal{Q} = \ln \prod_{\mathbf{r}'} z = \sum_{\mathbf{r}'} \ln z \quad \text{et} \quad \mathcal{H}'_1(\mu) = \ln \langle \exp[\mathcal{H}_{rem}(\sigma)] \rangle_{\mu}$$

Finalement, on obtient :

$$\mathcal{H}'(\mu) = \mathcal{H}'_0(\mu) + \mathcal{H}'_1(\mu) \quad (3.83)$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{H}'_0(\mu) = \sum_{\mathbf{r}'} \ln z \quad (3.84)$$

$$\text{et} \quad \mathcal{H}'_1(\mu) = \ln \langle \exp[\mathcal{H}_{rem}(\sigma)] \rangle_{\mu} \quad (3.85)$$

Remarquons que l'on peut évaluer $\mathcal{H}'_0(\mu)$ exactement, alors que $\mathcal{H}'_1(\mu)$ doit être traité de façon perturbative. Evaluons $\mathcal{H}'_0(\mu)$. Pour ce faire, on peut ne considérer qu'une seule plaquette (tout en tenant compte de l'effet des autres). Pour une plaquette donnée (par exemple, $\mathbf{r}' = \mathbf{1}$: centre de la plaquette # 1 ; voir la figure 3.5), on a :

$$\mathcal{H}'_0(\mu) = \ln z = \ln \cosh K_2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) + \ln 2 + 2K_0 \quad (3.86)$$

Dans une plaquette comme celle illustrée à la figure 3.5, il n'y a que certains types d'interactions possibles, de sorte que \mathcal{H}'_0 aura la forme suivante :

$$\mathcal{H}'_0(\mu) = K'_0 + K'_2 \sum_{\langle ij \rangle}^{(1)} \mu_i \mu_j + K'_2 \sum_{\langle ij \rangle}^{(2)} \mu_i \mu_j + K'_4 \sum_{\langle ijkl \rangle} \mu_i \mu_j \mu_k \mu_l$$

Dans notre cas, on aura :

$$\mathcal{H}'_0(\mu) = K'_0 + \frac{1}{2}K'_2(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_4 + \mu_4\mu_1) + K'_3(\mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_4) + K'_4\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 \quad (3.87)$$

Le terme $1/2$ devant K'_2 vient du fait que chaque paire $\mu_i\mu_j$ se retrouve dans deux plaquettes différentes, de sorte qu'elles seraient comptées deux fois lorsque l'on ferait la somme sur toutes les plaquettes, contrairement aux autres types d'interaction.

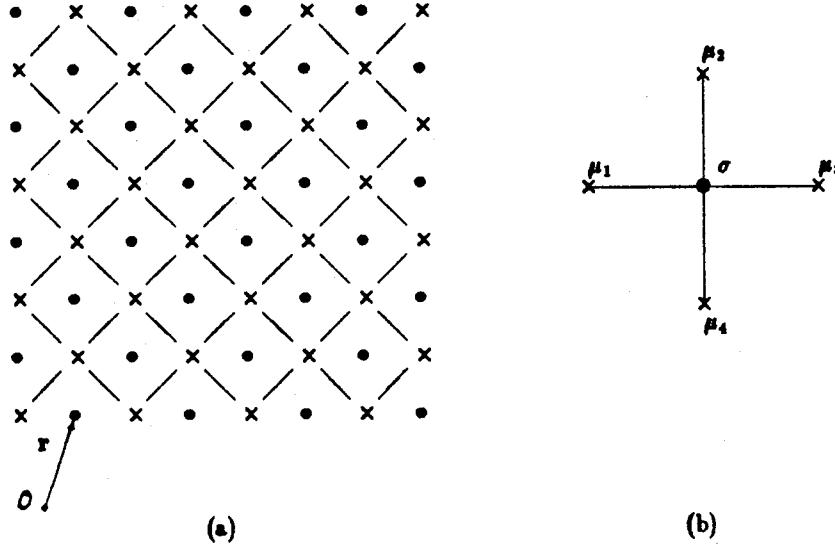


Figure 3.5: Réseau de plaquettes : (a) différentes plaquettes se touchant : (b) une plaquette particulière ($r' = 1$).

Identifions une configuration donnée de la plaquette par l'ensemble $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$ représenté par les flèches $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$ par exemple. Puisqu'il y a quatre configurations physiquement différentes, on trouve :

$$\text{i) } \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow : \mathcal{H}'_0(\mu) = \ln \cosh K_2 + \ln 2 + 2K_0 \\ = K'_0 + 2K'_2 + 2K'_3 + K'_4$$

$$\text{ii) } \uparrow\uparrow\uparrow\downarrow : \mathcal{H}'_0(\mu) = \ln \cosh K_2 + \ln 2 + 2K_0 \\ = K'_0 - K'_4$$

$$\text{iii) } \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow : \mathcal{H}'_0(\mu) = \ln 2 + 2K_0 \\ = K'_0 - 2K'_3 + K'_4$$

$$\text{iv) } \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow : \mathcal{H}'_0(\mu) = \ln 2 + 2K_0 \\ = K'_0 - 2K'_2 + 2K'_3 + K'_4$$

En résolvant le système d'équations, on trouve :

$$K'_0 = 2K_0 + U_0 \quad , \quad K'_2 = 2U_2 \quad , \quad K'_3 = U_2 \quad , \quad K'_4 = U_4 \quad (3.88)$$

avec

$$U_0 = \ln 2 + \frac{1}{8} \ln \cosh 4K_2 + \frac{1}{2} \ln \cosh 2K_2 \quad (3.89)$$

$$U_2 = \frac{1}{8} \ln \cosh K_2 \quad (3.90)$$

$$U_4 = \frac{1}{8} \ln \cosh 4K_2 - \frac{1}{2} \ln \cosh 2K_2 \quad (3.91)$$

Donc $\mathcal{H}'(\mu)$ pourrait s'écrire, en faisant la somme sur toutes les plaquettes et en tenant compte de \mathcal{H}'_i , comme [Hu ; 1982] :

$$\mathcal{H}'(\mu) = \frac{N^2}{2} U_0 + 2U_2 \sum_{\langle ij \rangle}^{(1)} \mu_i \mu_j + U_2 \sum_{\langle ij \rangle}^{(2)} \mu_i \mu_j + U_4 \sum_{\langle ijkl \rangle} \mu_i \mu_j \mu_k \mu_l + \dots \quad (3.92)$$

Comme on l'avait mentionné en §3.2.2 , le nouvel hamiltonien possède de nouveaux types d'interactions qui n'existaient pas dans l'ancien.

3.3.2 Méthode de Migdal-Kadanoff

Nous allons ici décrire rapidement la méthode, ses hypothèses de base, son application et ses limitations. Pour plus de détails, voir [Kadanoff; 1976], [Hu ; 1982] ou encore [Burkhardt ; 1982].

Comme on l'a déjà mentionné , la sommation sur tous les états d'un système, dans le cadre du calcul d'une TGR, est généralement irréalisable. La méthode de Migdal-Kadanoff est une méthode variationnelle qui rend cette somme calculable et qui optimise le résultat. Supposons que l'on introduise un terme $\Delta(s', s)$ à l'exposant de l'exponentielle de manière à rendre la somme calculable. Alors, le hamiltonien renormalisé approximé est :

$$\mathcal{H}'_A(s') = \ln \sum_{\{s\}} \exp [T(s', s) + \mathcal{H}(s) + \Delta(s', s)] \quad (3.93)$$

Le meilleur choix de $\Delta(s', s)$, tel que l'erreur soit minimisée, est obtenu par une méthode variationnelle. Les conditions sont les suivantes [Kadanoff ; 1976] :

1. $\sum_{\{s\}} \exp [T(s', s) + \mathcal{H}(s)]$ est une sommation avec des poids semi-définis positifs ;
2. $\Delta(s', s)$ est réel ;
3. $\sum_{\{s'\}} \sum_{\{s\}} \exp [T(s', s) + \mathcal{H}(s)] \Delta(s', s) = 0$.

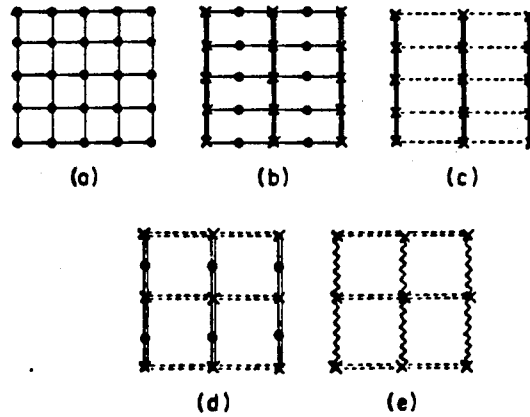


Figure 3.6: Méthode de Migdal-Kadanoff : (a) réseau initial ; (b) déplacement des liens- y ; (c) décimation dans la direction des x ; (d) déplacement des liens- x ; (e) décimation dans la direction des y [Hu ; 1982].

Sous ces conditions, l'énergie libre satisfait l'inégalité suivante [Hu ; 1982] :

$$F[\mathcal{M}'_A] \leq F[\mathcal{M}'] = F[\mathcal{M}] \quad (3.94)$$

Maintenant, désignons par $a_i^\alpha(s', s)$ tout ensemble de variables locales de spins (par exemple s_i, s_{i+1}) et par c_i^α des coefficients indépendants de s' et s . Alors, un choix simple pour $\Delta(s', s)$ est [Kadanoff ; 1976] :

$$\Delta(s', s) = \sum_{i, \alpha} c_i^\alpha a_i^\alpha(s', s) \quad (3.95)$$

avec,

$$\sum_i c_i^\alpha = 0, \quad \forall \alpha \quad (3.96)$$

Si les $a_i^\alpha(s', s)$ sont choisis de façon qu'ils soient semblables aux termes de $\mathcal{H}(s)$, alors le fait d'introduire $\Delta(s', s)$ a pour effet d'ajouter de telles interactions à un endroit et de les soustraire ailleurs [de manière à satisfaire (3.96)]. Plus simplement, on peut déplacer des liens à l'intérieur des contraintes variationnelles [Burkhardt ; 1982]. Afin d'illustrer la méthode, appliquons-la sur un réseau d'Ising carré bidimensionnel. On exécute alors la suite d'opérations suivantes (voir la figure 3.6) :

1. Déplacement horizontal des liens verticaux, d'une unité . On a alors,

$$\begin{aligned} K_x &= K \\ K_y &= 2K \end{aligned} \quad (3.97)$$

2. Décimation des rangées. On somme sur les spins n'ayant pas de liens verticaux, ce qui revient à une décimation en une dimension (selon x) : les interactions en y ne sont pas affectées puisqu'elles sont sur les spins non-décimés. Donc, d'après (3.70), on aura ;

$$\begin{aligned} K'_x &= \tanh^{-1}(\tanh K_x)^2 = \tanh^{-1}(\tanh K)^2 \\ K'_y &= K_y = 2K \end{aligned} \quad (3.98)$$

3. Déplacement vertical des liens horizontaux d'une unité . On a alors,

$$\begin{aligned} K''_x &= 2K'_x = 2 \tanh^{-1}(\tanh K)^2 \\ K''_y &= K'_y = 2K \end{aligned} \quad (3.99)$$

4. Décimation des colonnes. Les relations de récurrence donnent alors,

$$\begin{aligned} K'''_x &= K''_x = 2 \tanh^{-1}(\tanh K)^2 \\ K'''_y &= \tanh^{-1}(\tanh K''_y)^2 = \tanh^{-1}(\tanh 2K)^2 \end{aligned} \quad (3.100)$$

On a donc réduit notre réseau initial d'un facteur $\lambda = 2$. Notons toutefois que la procédure a pour effet de rendre le nouveau réseau anisotrope. On peut retrouver l'isotropie en symétrisant nos constantes de couplage [Hu ; 1982] :

$$K''' = \frac{1}{2}(K'''_x + K'''_y) \quad (3.101)$$

Si l'on généralise la procédure pour un changement d'échelle $a \rightarrow \lambda a$, alors,

$$\begin{aligned} K'''_x &= \lambda \tanh^{-1}(\tanh K)^\lambda \\ K'''_y &= \tanh^{-1}(\tanh \lambda K)^\lambda \end{aligned} \quad (3.102)$$

et leur valeur symétrique est :

$$K''' = \frac{1}{2}(K'''_x + K'''_y) = \beta_\lambda(K) \quad (3.103)$$

Notons que $\beta_\lambda(K)$ est l'équation de Callan-Symanzik, bien connue en théorie quantique des champs [Hu ; 1982].

En terminant cette description succincte, il faut mentionner quelques points faibles de la méthode. Premièrement, il n'y a pratiquement aucune interaction entre K_x et K_y lors de la réduction du système, ce qui n'a pas beaucoup de sens physiquement. En deuxième lieu, les résultats obtenus sont plutôt décevants (du point de vue de l'exactitude). Finalement, cette méthode n'est plus valable pour $d > 4$.

3.3.3 Autres méthodes

L'objectif principal de cette sous-section est de donner un exemple de transformation implicite. Pour ce faire, nous allons donner les résultats de [Derrida et Flyvbjerg ; 1985].

Considérons un réseau d'Ising *fini* constitué de N sites dans un espace de dimension d . Sous un changement d'échelle $a \rightarrow \lambda a$, on aura la relation de récurrence implicite suivante :

$$\frac{Z_N(K)}{[Z_{N/\lambda^d}(K)]^{\lambda^d}} = \frac{Z_{N/\lambda^d}(K')}{[Z_{N/\lambda^{2d}}(K')]^{\lambda^d}} \quad (3.104)$$

On remarque que (3.104) fait appel à trois réseaux de tailles différentes : N , N/λ^d et N/λ^{2d} sites. La relation explicite entre K' et K n'est pas connue, mais on peut la trouver de façon numérique.

Finalement, mentionnons qu'il existe bien d'autres méthodes mises au point, aussi bien dans l'espace des coordonnées (*real-space renormalisation*) que dans l'espace des impulsions (*momentum space*). Enfin, certaines de ces méthodes sont sous forme d'équations intégrales ou encore sous forme d'équations différentielles [Burkhardt ; 1982]. Nous arrêterons ici l'énumération des techniques ; celles dont nous aurons besoin ont été décrites.

Voyons maintenant un type de modèle particulier sur lequel porte le reste du mémoire : les modèles hiérarchiques.

Chapitre 4

Réseaux hiérarchiques

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un type particulier de réseau ; les réseaux hiérarchiques. L'intérêt de ce type de réseau vient du fait que les TGR y sont exactes en plus d'être des fonctions rationnelles. Ce sont ces propriétés qui nous permettront de faire le lien avec la géométrie fractale au chapitre 6.

Dans un premier temps, nous étudierons la construction et les propriétés thermodynamiques des ces réseaux (§4.1). Ensuite, on fera le calcul complet d'une TGR sur un réseau particulier, à titre d'exemple (§4.2). Finalement, on donnera une courte liste de différents réseaux dont on connaît les TGR (§4.3).

4.1 Construction et propriétés thermodynamiques

Dans cette sous-section, nous allons d'abord montrer quelques exemples de réseaux hiérarchiques et leur raison d'être. Ensuite suivra une description de la topologie de ces réseaux, et finalement, les propriétés thermodynamiques des modèles hiérarchiques seront établies.

4.1.1 Exemples de réseaux hiérarchiques

La raison principale de l'étude des modèles hiérarchiques vient du fait qu'ils peuvent être solutionnés exactement : les techniques du groupe de renormalisation donnent des TGR exactes, contrairement aux cas des réseaux de Bravais où les TGR sont généralement tronquées (voir §3.3).

Il existe plusieurs types de réseaux hiérarchiques : en fait, on peut en construire une infinité . Nous allons ici en donner quelques exemples. Commençons par le mieux connu : le réseau hiérarchique en diamant (figure 4.1). On peut interpréter cette figure

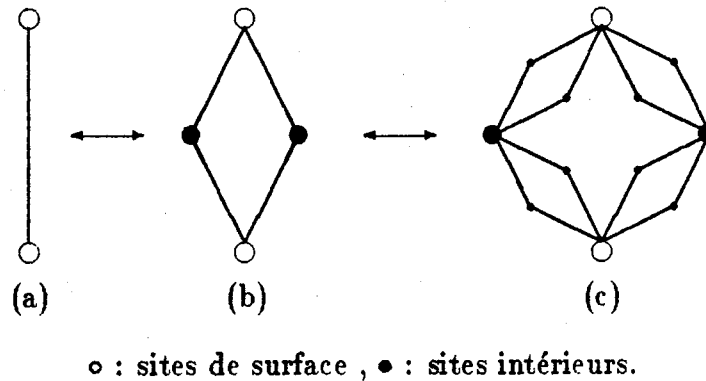


Figure 4.1: Construction d'un réseau hiérarchique en diamant.

de deux façons. La première, souvent appelée *agrégation* ou *décoration*, consiste à prendre quatre liens primitifs comme en 4.1(a) et de les assembler en une cellule comme en 4.1(b) ; chaque lien de 4.1(b) est lui aussi remplacé par quatre liens pour donner 4.1(c) et ainsi de suite. En itérant un nombre arbitraire de fois, on obtient un réseau arbitrairement grand. La deuxième interprétation consiste à considérer que 4.1(a) ne représente que les *sites de surface* ; si l'on fait des zooms, on constate que 4.1(a) est de plus en plus complexe. Cette approche est appelée la *miniaturisation* ; elle correspond en fait à une *décimation* itérée plusieurs fois [Griffiths et Kaufman ; 1982].

Sur les sites du réseaux, il est possible de placer n'importe lequel des modèles de spins classiques (Ising, Potts, Heisenberg, XY, etc.). Par exemple, pour le modèle d'Ising, on écrit pour 4.1(a) :

$$H^{(0)} = K_0 \sigma_1 \sigma_2 + \frac{1}{2} h_0 (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (4.1)$$

C'est le hamiltonien réduit ($-\mathcal{H}/k_B T$), avec K_0 la constante de couplage réduite et h_0 proportionnel au champ magnétique extérieur. L'itération pour 4.1(b) donne :

$$H^{(1)} = K_0 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_4 + \sigma_4 \sigma_1) + h_0 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) \quad (4.2)$$

où le terme $\frac{1}{2}$ devant h_0 de (4.1) disparaît du fait que pour chaque site, il y a deux contributions des liens primitifs. Comme on le voit, d'une itération à la suivante, le hamiltonien est exact [Griffiths et Kaufman ; 1982].

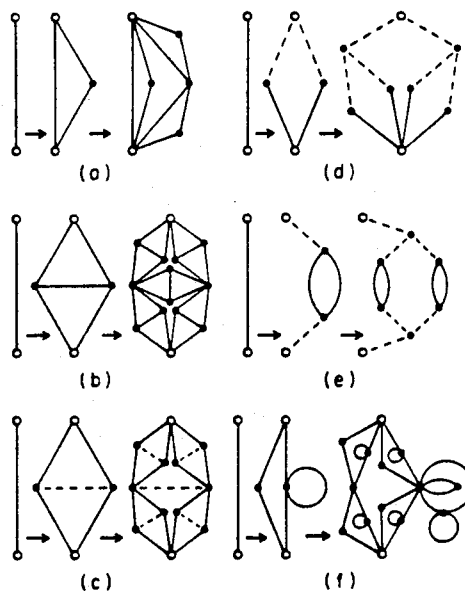


Figure 4.2: Exemples de réseaux hiérarchiques [Griffiths et Kaufman ; 1982].

La caractéristique essentielle rendant ces modèles résolubles de manière exacte par une procédure itérative est la contrainte que les interactions ne s'étendent qu'entre les sites aux deux extrémités d'un lien primitif. Nous reviendrons sur cette caractéristique lors du calcul exact d'une TGR sur de tels réseaux.

Le modèle en diamant est un exemple de réseaux hiérarchiques possibles à réaliser : il y en a beaucoup d'autres. La figure 4.2 en illustre quelques uns. On peut introduire des liens qui ne sont pas itérés et qui peuvent avoir des constantes de couplage différentes des liens itérés ; ceux-ci sont représentés par des liens en tirets sur la figure 4.2. Une autre possibilité consiste à itérer des liens de façons différentes (voir la figure 4.3) ; les liens hachurés et les liens non-hachurés se transforment différemment. On appelle ce type de réseau un *réseau hiérarchique non-uniforme*.

4.1.2 Topologie des réseaux hiérarchiques

Nous allons ici donner quelques définitions et propriétés importantes des réseaux hiérarchiques, et plus spécifiquement pour le réseau en diamant [Griffiths et Kaufman ; 1982].

Le *nombre d'agrégations B (aggregation number)* d'un réseau hiérarchique est le nombre de sous-unités assemblées ensemble à chaque itération pour former une nouvelle cellule. Pour le cas du réseau en diamant de la figure 4.1, $B = 4$. Pour les six autres

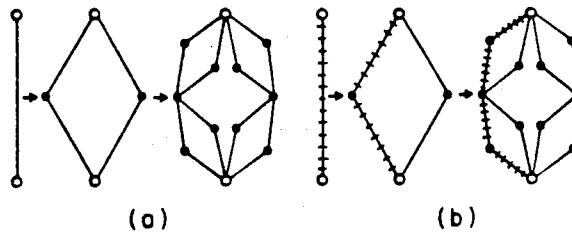


Figure 4.3: Exemple d'un réseau hiérarchique non-uniforme [Griffiths et Kaufman ; 1982].

de la figure 4.2, $B = 3, 5, 4, 2, 2$ et 5 respectivement. Les liens non- itérés (en tirets) ne sont pas comptés pour déterminer B , pas plus que les "vertexes" qu'ils produisent.

La quantité B est souvent notée b^d lorsqu'un réseau hiérarchique est utilisé pour approximer un réseau de Bravais de dimensionnalité d , dans les calculs d'une TGR. Ici, b est le facteur par lequel le réseau de Bravais est réduit à chaque étape (b correspond au λ des chapitres précédents). Cependant, la définition de b ou de d n'est pas claire pour les réseaux hiérarchiques et, pour cette raison, on utilise B de préférence à b ou d .

En général, un réseau hiérarchique contient des sites (ou "vertexes") de types différents. On utilise le terme *site lié* pour les sites faisant partie d'une ou plusieurs sous-unités, et *site libre* pour ceux dont ce n'est pas le cas. Les *sites de surface* d'une unité d'un ordre (ou étape) donné sont ceux avec lesquels des unités du même ordre sont attachées entre elles (soit en faisant coïncider les sites, soit en additionnant des liens non-itérés) pour former des unités d'ordre supérieur. Les sites qui ne sont pas des sites de surface sont appelés *sites intérieurs*. Dans la "représentation" de la miniaturisation, ce sont les sites qui apparaissent en faisant des zooms. Dans les figures 4.1, 4.2 et 4.3, les sites de surface sont représentés par des cercles vides. Dans certains cas, tels ceux de la figure 4.1, 4.2(a), etc., ces sites de surface sont des sites liés, alors que la figure 4.2(e) représente des sites de surface qui sont des sites libres. Pour nos figures, les sites libres sont aussi des sites de surface, mais ce n'est pas obligatoire. On considère aussi qu'une unité à un ordre donné fini contient toujours un nombre fini de sites.

On utilise aussi les termes *de surface* et *intérieurs* pour les sous-unités dont est constituée une unité donnée. Si au moins un site d'une sous-unité coïncide avec un site de surface de l'unité considérée, la sous-unité est une *sous-unité de surface* ou encore *sur la surface* : autrement c'est une *sous-unité intérieure* ou encore *à l'intérieur*. L'examen de la figure 4.1 permet de dire que tous les liens de l'ordre $N - 1$ sont sur la surface des liens de l'ordre N , alors que seulement la moitié des liens de l'ordre $N - 2$ le sont.

On appelle l l'*indice de séparation* d'un réseau hiérarchique, en autant qu'une unité

d'ordre $N \geq l$ possède au moins une unité d'ordre $N - l$ à l'intérieur, et en autant que l est le plus petit entier pour lequel cette situation est réalisée. Pour le diamant, $l = 2$ et pour les réseaux de la figure 4.2, on a $l = 2$ pour (a) et (c), $l = 1$ pour (b), (e) et (f) : (d) ne possède pas d'indice de séparation ($l = \infty$) puisque les sous-unités ne sont jamais extérieures. Notons que les liens non-itérés ne forment pas une unité au sens utilisé ci-haut.

Ceci constitue les principales propriétés et définitions des réseaux hiérarchiques que nous utiliserons ici. Pour plus de détails, voir [Griffiths et Kaufman ; 1982].

4.1.3 Propriétés thermodynamiques

Dans cette sous-section, nous examinerons les conditions nécessaires à l'existence de l'énergie libre à la limite thermodynamique ; les résultats essentiels se résument en deux théorèmes [Griffiths et Kaufman ; 1982].

On va considérer qu'à chaque étape, un ensemble de $B \geq 2$ unités d'ordre $N - 1$ sont assemblées pour former une unité d'ordre N . A chaque site on fait correspondre une variable de "spin". Les lettres σ et τ^α sont utilisées pour désigner la collection des variables de spins associées aux sites de surface, où α distingue les variables associées aux unités du même ordre. Puisque différentes unités peuvent avoir des vertexes en commun, les collections ne sont pas indépendantes. Afin d'en tenir compte, tout en ne compliquant pas trop la notation, on utilisera un delta de Kronecker approprié dans une fonction Y_N (définie plus bas). Le hamiltonien réduit ($H^{(N)} = -\mathcal{H}/k_B T$) d'une unité à l'ordre N est donné par [Griffiths et Kaufman ; 1982] :

$$H^{(N)} = \sum_{\alpha} H^{(0)}(\tau^\alpha) + \widehat{H}^{(N)} \quad (4.3)$$

La somme est prise sur les sous-unités ($N - 1$) qui composent l'unité en question (N), avec $H^{(0)}$ la même fonction pour chacune des sous-unités. Le terme $\widehat{H}^{(N)}$ est la somme de tous les liens non-itérés à l'ordre N . Comme on l'a dit, on a :

α : indice distinguant les variables des unités du même ordre ($N - 1$) ;

τ^α : collection des variables de surface associées à la $\alpha^{i\text{ème}}$ sous-unité d'ordre ($N - 1$).

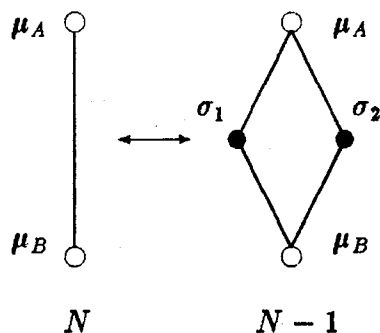


Figure 4.4: Modèle d'Ising sur un réseau en diamant.

Pour le modèle d'Ising sur un réseau en diamant, par exemple (figure 4.4), on aura :

$$N \quad : \quad \alpha = 1 \quad , \quad \tau^\alpha = \mu_A \mu_B$$

$$N - 1 \quad : \quad \alpha = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \quad , \quad \tau^\alpha = \begin{cases} \sigma_1 \mu_A \\ \sigma_1 \mu_B \\ \sigma_2 \mu_A \\ \sigma_2 \mu_B \end{cases}$$

On définit la *fonction de partition restreinte* (*restricted partition function*) $Z_N(\sigma)$:

$$Z_N(\sigma) = \sum_{s.i.} e^{H^{(N)}} \quad (4.4)$$

où *s.i.* signifie *sites intérieurs*. Dans l'exemple précédent, on aurait :

$$Z_N(\sigma) = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} e^{H^{(N)}}$$

car σ_1 et σ_2 sont les sites intérieurs, alors que μ_A et μ_B sont les sites de surface. La fonction de partition totale Z_N associée à une unité d'ordre N et l'énergie libre f_N (sans dimension) par unité primitive sont données par [Griffiths et Kaufman ; 1982] :

$$Z_N = \exp(B^N f_N) = \sum_{\sigma} Z_N(\sigma) \quad (4.5)$$

Soit $H_N(\sigma)$ le *hamiltonien efficace* (ne pas le confondre avec $H^{(N)}$). On le définit comme ;

$$Z_N(\sigma) = \exp[H_N(\sigma) + C_N] \quad (4.6)$$

avec la condition de trace nulle :

$$\sum_{\sigma} H_N(\sigma) = 0 \quad (4.7)$$

Cette dernière condition fixe également C_N . Comme on le voit, ceci est similaire aux définitions données dans la remarque 2 en §3.2.2.

On peut écrire $Z_N(\sigma)$ à partir des $Z_{N-1}(\sigma)$. Dans notre exemple, on aura ;

$$Z_N(\mu_A, \mu_B) = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} Z_{N-1}(\mu_A, \sigma_1) Z_{N-1}(\mu_A, \sigma_2) Z_{N-1}(\mu_B, \sigma_1) Z_{N-1}(\mu_B, \sigma_2) \quad (4.8)$$

De manière générale, on peut écrire :

$$Z_N(\sigma) = \sum_{\tau} Y_N(\sigma; \tau) \prod_{\alpha=1}^B Z_{N-1}(\tau^\alpha) \quad (4.9)$$

Notons que τ dénote l'ensemble des τ^α , qui sont traités de façon indépendante dans \sum_{τ} . Le fait qu'ils ne soient pas vraiment indépendants est inclus dans Y_N ; $Y_N = 0$ si ses arguments sont inconsistants avec le mode de construction du réseau. De plus, Y_N contient les poids de Boltzmann associés aux interactions non-itérées ($\widehat{H}^{(N)}$). Si ces interactions sont les mêmes à chaque niveau, alors on peut laisser l'indice N et écrire Y seulement. Si l'on itère (4.9) un nombre fini de fois, on aura :

$$Z_N(\sigma) = \sum_{\tau} Y_N^{(l)}(\sigma; \tau) \prod_{\alpha} Z_{N-1}(\tau^\alpha) \quad (4.10)$$

où α comprend l symboles. Bien entendu, on aura $Y_N^{(1)} = Y_N$.

D'après les équations (4.6) et (4.7), on peut écrire :

$$\exp[H_N(\sigma) + \psi_N] = \sum_{\tau} Y_N(\sigma; \tau) \exp \left\{ \sum_{\alpha=1}^B H_{N-1}(\tau^\alpha) \right\} \quad (4.11)$$

avec

$$\psi_N = C_N - B C_{N-1} \quad (4.12)$$

Notons que ψ_N est unique en autant que (4.6) soit satisfaite. On définit ψ_0 comme étant égal à C_0 : $\psi_0 = C_0$. Revenons un peu sur $H_N(\sigma)$. D'après (4.3), on a, du fait qu'il n'y a pas de site intérieur :

$$Z_0(\sigma) = \sum_{s.i.} e^{H^{(0)}} = e^{H^{(0)}}$$

D'autre part,

$$Z_0(\sigma) = \exp[H_0(\sigma) + C_0]$$

d'où ;

$$H^{(0)} = H_0 + C_0 = H_0 + \psi_0$$

Puisque $\sum_{\sigma} H_0 = 0$, on aura $\psi_0 = 0$ si $\sum_{\sigma} H^{(0)} = 0$. Donc,

$$H^{(0)} = H_0(\sigma) + \psi_0 \quad \text{et} \quad \psi_0 = 0 \quad \text{si} \quad \sum_{\sigma} H^{(0)} = 0$$

En comparant (4.5), (4.6) et (4.12), la limite thermodynamique de l'énergie libre, définie comme

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N \quad (4.13)$$

est donnée par :

$$f = \sum_{N=0}^{\infty} B^{-N} \psi_N \quad (4.14)$$

à condition que la somme converge et que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} B^{-N} \ln \left\{ \sum_{\sigma} \exp H_N(\sigma) \right\} = 0 \quad (4.15)$$

L'existence de la limite (4.13) et la validité de (4.14) dépendent entièrement des propriétés de $H^{(0)}$ et Y_N . Voici une liste de conditions qui seront utilisées dans les deux théorèmes touchant les modèles hiérarchiques [Griffiths et Kaufman ; 1982] :

1. Le hamiltonien $H^{(0)}(\sigma)$ d'une unité primitive prend des valeurs finies (réelles).
2. $0 \leq Y_N(\sigma; \tau) < \infty$.
3. Pour chaque N et pour chaque valeur de σ , il y a au moins une valeur de τ pour laquelle $Y_N(\sigma; \tau)$ est plus grand que zéro.
4. La somme $\sum_{N=1}^{\infty} B^{-N} G_N$ converge, avec

$$G_N = \max_{\sigma, \tau} \ln Y_N(\sigma; \tau) . \quad (4.16)$$

5. La somme $\sum_{N=1}^{\infty} B^{-N} g_N$ converge, avec

$$g_N = \min^* \ln Y_N(\sigma; \tau) \quad (4.17)$$

où \min^* : minimum dans les choix possibles de σ et τ pour lequel $Y_N(\sigma; \tau) > 0$.

6. Il existe un l fini tel que pour chaque $N \geq l$ et pour chaque valeur de σ , il y a au moins un α (qui peut dépendre de σ) tel que pour toute valeur de τ^α , il existe un τ (i.e. certains choix pour τ^β avec $\beta \neq \alpha$) pour lequel $Y_N^{(l)}(\sigma; \tau) > 0$.

Regardons ce que ces conditions signifient. En général, $Y_N(\sigma; \tau) = 0$ seulement si σ et τ sont identiques, ce qui correspond au même site sur le réseau hiérarchique. Autrement, Y_N est strictement plus grand que zéro, avec une valeur déterminée par les interactions non-itérées (supposées finies). Ceci satisfait automatiquement 2 et 3, car $0 \leq Y_N(\sigma; \tau) < \infty$ (Y_N plus grand que zéro et fini) et $\exists Y_N \neq 0$, sinon il n'y aurait qu'un site, ce qui ne serait pas un réseau hiérarchique. De plus, si le réseau possède un indice de séparation fini, alors 6 est satisfaite, avec $l =$ indice de séparation (voir §4.1.2). Lorsqu'il n'y a pas de lien non-itéré, $Y_N = 0$ ou 1, de sorte que

$$\begin{aligned} G_N &= \max_{\sigma, \tau} \ln Y_N \\ &= \max [\ln 0, \ln 1] \\ &= \max [-\infty, 0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$g_N = \min^* \ln Y_N = \min [\ln 1] = 0$$

car il faut $Y_N > 0$. Puisque $G_N = g_N = 0$, alors 4 et 5 sont satisfaites. Lorsqu'il y a des liens non-itérés, 4 et 5 ne font que demander qu'ils ne se multiplient pas trop vite avec N . Notons que dans les cas qui nous intéressent, 1 est nécessairement satisfaite.

Donc, dans la plupart des cas, 1, 2 et 3 seront satisfaites, alors que 4 et 5 restreignent (pas trop sévèrement) la croissance des liens non-itérés avec N . Seul 6 est un peu plus problématique ; c'est d'ailleurs le seul point qui repose essentiellement sur la topologie du réseau hiérarchique. A partir de ces six conditions, on peut démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème 4.1 *Si les conditions 1-3, 4 et 5 sont satisfaites, la limite (4.13) pour f existe et est finie ;*

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N .$$

Théorème 4.2 *Si, en plus des conditions 1-5, 6 est aussi satisfaite, alors f est donnée par (4.14) :*

$$f = \sum_{N=0}^{\infty} B^{-N} \psi_N .$$

La preuve de ces théorèmes est donnée dans [Griffiths et Kaufman ; 1982]. Voilà qui termine le tour d'horizon des propriétés des modèles hiérarchiques. Nous verrons maintenant le calcul explicite d'une TGR afin de bien assimiler les différentes définitions.

4.2 Exemple complet du calcul d'une TGR sur un réseau hiérarchique

Dans cette section, nous allons calculer une TGR à partir des définitions de §4.1 : la méthode utilisée est une décimation. On constatera que l'on obtient bien une TGR exacte ; cela provient du fait que les réseaux hiérarchiques sont construits de façon telle qu'il n'y a que deux sites de surface par lien primitif.

4.2.1 Définitions et fonction de partition.

Considérons le réseau hiérarchique illustré à la figure 4.5.

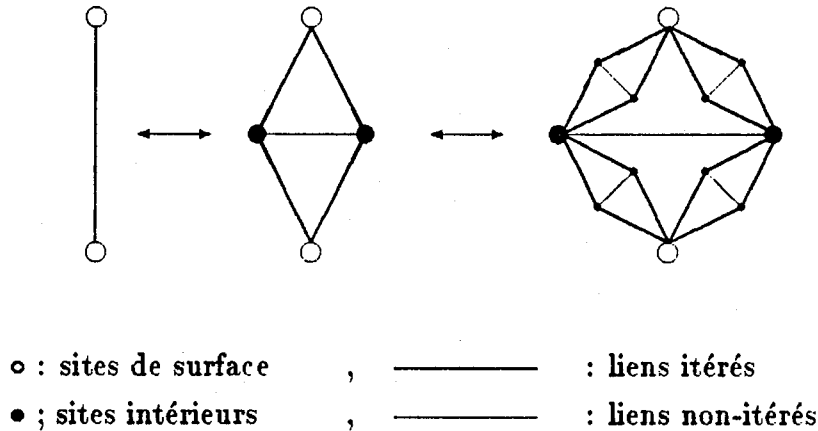


Figure 4.5: Les trois premières étapes du réseau.

On a :

$$Z_N = \sum_{\sigma} Z_N(\sigma) \quad (4.18)$$

où

$$Z_N(\sigma) = \sum_{\tau} Y_N(\sigma; \tau) \prod_{\alpha=1}^B Z_{N-1}(\tau^{\alpha}) \quad (4.19)$$

Dans notre cas, on a la situation illustrée à la figure 4.6. Alors, on aura les variables suivantes :

$$\begin{cases} \sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\} \\ \tau = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\} \\ B = 4 \end{cases} \quad (4.20)$$

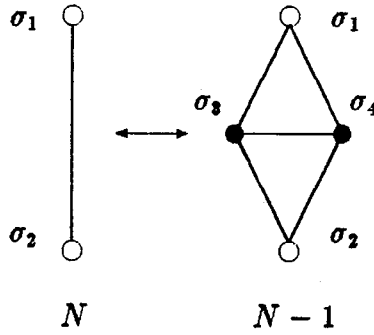


Figure 4.6: Les différentes variables de deux itérations.

Notons que l'on considère un modèle d'Ising sur ce réseau. Puisque les liens non-itérés sont les mêmes, $\forall N$, alors;

$$Y_N(\sigma, \tau) = Y(\sigma, \tau) \quad (4.21)$$

De plus, on a ;

$$Z_N(\sigma) = \exp[H_N(\sigma) + C_N] \quad (4.22)$$

D'après notre figure, il y a 4 sous-unités d'ordre $N - 1$ ($\alpha = 1, \dots, 4$) de sorte que ;

$$\alpha = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \tau^\alpha : \begin{cases} \tau^1 = (\sigma_1, \sigma_3) \\ \tau^2 = (\sigma_1, \sigma_4) \\ \tau^3 = (\sigma_2, \sigma_3) \\ \tau^4 = (\sigma_2, \sigma_4) \end{cases} \quad (4.23)$$

Notons que (σ_3, σ_4) ne forme pas une sous-unité puisque ce lien n'est pas itéré .

Revenons à (4.19). Portant (4.21) dans (4.19), il vient ;

$$Z_N(\sigma) = \sum_{\tau} Y(\sigma; \tau) \prod_{\alpha=1}^4 Z_{N-1}(\tau^\alpha)$$

Or, $Y = 0$ pour $\tau = \sigma$, de sorte que

$$\sum_{\tau=\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} Y(\sigma; \tau) = \sum_{\sigma_3, \sigma_4} Y(\sigma, \tau) \quad , \text{ car } \sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \in \sigma, \tau.$$

Donc,

$$Z_N(\sigma) = \sum_{\sigma_3, \sigma_4} Y(\sigma, \tau) \prod_{\alpha=1}^4 Z_{N-1}(\tau^\alpha) \quad (4.24)$$

D'après (4.22), on aura ;

$$Z_{N-1}(\tau^\alpha) = \exp[H_{N-1}(\tau^\alpha) + C_{N-1}]$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \prod_{\alpha=1}^4 Z_{N-1}(\tau^\alpha) &= \prod_{\alpha=1}^4 \exp[H_{N-1}(\tau^\alpha) + C_{N-1}] \\
&= \exp \left\{ \sum_{\alpha=1}^4 [H_{N-1}(\tau^\alpha) + C_{N-1}] \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{\alpha=1}^4 H_{N-1}(\tau^\alpha) + 4C_{N-1} \right\} \\
&= e^{4C_{N-1}} \exp \left\{ \sum_{\alpha=1}^4 H_{N-1}(\tau^\alpha) \right\}
\end{aligned}$$

Portant ce résultat dans (4.24), et notant que $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, on aura ;

$$Z_N(\sigma_1, \sigma_2) = e^{4C_{N-1}} \sum_{\sigma_3, \sigma_4} Y(\sigma; \tau) \exp \left\{ \sum_{\alpha=1}^4 H_{N-1}(\tau^\alpha) \right\} \quad (4.25)$$

Penchons-nous maintenant sur H_N . Comme on l'a déjà dit, on considère un modèle d'Ising, de sorte que ;

$$\sigma_i = \pm 1 \quad (4.26)$$

De plus, on considère un hamiltonien (sans dimension : $-\mathcal{H}/k_B T$) de la forme ;

$$H^{(0)} = K_0 \sigma_i \sigma_j \quad (4.27)$$

i.e. qu'il n'y a pas de champ magnétique externe. Le lien non-itéré est donné par;

$$\bar{H} = \bar{h}(\sigma_i - \sigma_j) \quad (4.28)$$

La symétrie du problème fait en sorte que seule la différence est importante. On définit

$$H_N(\sigma_i, \sigma_j) \equiv K_N \sigma_i \sigma_j \quad (4.29)$$

Or,

$$\sum_{\sigma} H_N(\sigma) = \sum_{\sigma_i, \sigma_j = \pm 1} K_N \sigma_i \sigma_j = K_N \sum_{\sigma_i = \pm 1} (\sigma_i - \sigma_i) = 0$$

Donc, la trace de (4.29) est bien nulle, de sorte que (4.29) est acceptable et définit C_N .

Alors, on aura;

$$H_{N-1}(\tau^\alpha) = K_{N-1} \sigma_i \sigma_j \quad , \text{ où } \sigma_i, \sigma_j \in \tau^\alpha. \quad (4.30)$$

D'après (4.23), on obtient ;

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^4 H_{N-1}(\tau^\alpha) &= K_{N-1} \{ \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_4 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_4 \} \\
&= K_{N-1} (\sigma_1 + \sigma_2) (\sigma_3 + \sigma_4)
\end{aligned} \quad (4.31)$$

Portant (4.31) dans (4.25), il vient ;

$$Z_N(\sigma_1, \sigma_2) = e^{4C_{N-1}} \sum_{\sigma_3, \sigma_4} Y(\sigma; \tau) \exp\{K_{N-1}(\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_3 + \sigma_4)\} \quad (4.32)$$

Examinons maintenant les $Y(\sigma; \tau)$. Ils doivent contenir les liens non-itérés. Puisque $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ et $\tau = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, on aura ;

$$Y(\sigma; \sigma_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ e^{\bar{h}} & \text{si } (i, j) = (3, 4) \text{ ou } (4, 3) \\ 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

Dans notre cas, on aura simplement ;

$$Y(\sigma; \tau) = \begin{cases} 0 & \tau = \sigma_1, \sigma_2 \\ e^{\bar{h}} & \tau = \sigma_3, \sigma_4 \end{cases} \quad (4.33)$$

Ce sont les seules possibilités. Alors ;

$$\sum_{\tau} Y(\sigma, \tau) = \sum_{\sigma_3, \sigma_4} \exp\{\bar{h}(\sigma_3 - \sigma_4)\}$$

d'où (4.32) devient ;

$$\begin{aligned} Z_N(\sigma_1, \sigma_2) &= e^{4C_{N-1}} \sum_{\sigma_3, \sigma_4 = \pm 1} \exp\{\bar{h}(\sigma_3 - \sigma_4) + K_{N-1}(\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_3 + \sigma_4)\} \\ &= 2e^{4C_{N-1}} \{\cosh[2K_{N-1}(\sigma_1 + \sigma_2)] + \cosh 2\bar{h}\} \end{aligned}$$

Donc,

$$Z_N(\sigma_1, \sigma_2) = 2e^{4C_{N-1}} \{\cosh[2K_{N-1}(\sigma_1 + \sigma_2)] + \cosh 2\bar{h}\} \quad (4.34)$$

4.2.2 Transformations de renormalisation.

Nous allons ici trouver la relation entre K_N et K_{N-1} . D'après (4.22) et (4.29), on a ;

$$\begin{aligned} Z_N(\sigma_1, \sigma_2) &= \exp[H_N(\sigma_1, \sigma_2) + C_N] \\ &= \exp[K_N \sigma_1 \sigma_2 + C_N] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Egalant (4.34) et (4.35), il vient ;

$$\exp[K_N \sigma_1 \sigma_2 + C_N] = 2e^{4C_{N-1}} \{\cosh[2K_{N-1}(\sigma_1 + \sigma_2)] + \cosh 2\bar{h}\}$$

Donc,

$$\begin{aligned} e^{\psi_N} \exp[K_N \sigma_1 \sigma_2] &= 2 \{\cosh[2K_{N-1}(\sigma_1 + \sigma_2)] + \cosh 2\bar{h}\} \\ \text{avec } \psi_N &\equiv C_N - 4C_{N-1}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Il y a deux configurations possibles à l'étape N , i.e. ;

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad \underline{\sigma_1 = \sigma_2 \quad (\uparrow\uparrow \text{ ou } \downarrow\downarrow)} \quad ; \quad e^{\psi_N} e^{K_N} = 2\{\cosh 4K_{N-1} + \cosh 2\bar{h}\} \\
 & \bullet \quad \underline{\sigma_1 = -\sigma_2 \quad (\downarrow\uparrow \text{ ou } \uparrow\downarrow)} \quad ; \quad e^{\psi_N} e^{-K_N} = 2\{1 + \cosh 2\bar{h}\}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

On a un système à deux variables et deux inconnues. Divisant les deux équations de (4.37), il vient ;

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{\psi_N} e^{K_N}}{e^{\psi_N} e^{-K_N}} &= \frac{2\{\cosh 4K_{N-1} + \cosh 2\bar{h}\}}{2\{1 + \cosh 2\bar{h}\}} \\
 \Rightarrow e^{2K_N} &= \frac{\cosh 4K_{N-1} + \cosh 2\bar{h}}{1 + \cosh 2\bar{h}}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Aussi, la multiplication des équations de (4.37) donne ;

$$e^{2\psi_N} = 4\{\cosh 4K_{N-1} + \cosh 2\bar{h}\}\{1 + \cosh 2\bar{h}\} \tag{4.39}$$

On peut réécrire (4.38) différemment. Posant ;

$$\omega' \equiv e^{2K_N} \quad , \quad \omega \equiv e^{2K_{N-1}} \quad , \quad \alpha \equiv \cosh 2\bar{h} \tag{4.40}$$

alors (4.38) devient :

$$\omega' = (1 + \alpha)^{-1} \left(\frac{\omega^2 + \omega^{-2}}{2} + \alpha \right) = \frac{\omega^4 + 2\alpha\omega^2 + 1}{2\omega^2(1 + \alpha)}$$

Finalement,

$$\omega' = \frac{\omega^4 + 2\alpha\omega^2 + 1}{2\omega^2(1 + \alpha)} \tag{4.41}$$

Il est facile de retrouver le résultat pour le réseau en diamant. En effet, dans ce cas,

$$\bar{h} = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

d'où

$$\omega' = \frac{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}{2\omega^2(1 + 1)} = \frac{(\omega^2 + 1)^2}{4\omega^2} = \left(\frac{\omega^2 + 1}{2\omega} \right)^2$$

Donc,

$$\omega' = \left(\frac{\omega^2 + 1}{2\omega} \right)^2 \tag{4.42}$$

ce qui est bien le résultat pour le réseau en diamant. Finalement, (4.39) donne :

$$\psi_N = \frac{1}{2} \ln \left(4\{\cosh 4K_{N-1} + \cosh 2\bar{h}\}\{1 + \cosh 2\bar{h}\} \right) \tag{4.43}$$

Notons que l'on peut retrouver ce résultat à partir des définitions de départ. Comme on vient de le voir, la TGR est exacte, et cette propriété provient du fait qu'il n'y a que deux sites de surface : on a alors un système à deux équations et deux inconnues à résoudre [Kaufman et Griffiths ; 1984].

Dans la prochaine section, nous allons donner une liste de TGR pour différents modèles et différents types de réseaux ; les calculs des TGR se font toujours de la même façon, *i.e.* une décimation. En terminant, mentionnons que la décimation sur réseau hiérarchique correspond à la méthode de Migdal-Kadanoff sur réseau de Bravais [Berker et Ostlund ; 1979].

4.3 TGR connues pour certains réseaux

Nous allons ici donner les relations de récurrence pour différents modèles (Ising et Potts) appliqués à quelques types de réseaux hiérarchiques.

4.3.1 Modèle d'Ising

Le hamiltonien considéré est celui du modèle d'Ising sans champ magnétique extérieur. Donc, pour un lien primitif, le hamiltonien et le hamiltonien effectif seront :

$$H^{(0)} = K_0 \sigma_i \sigma_j \quad \text{et} \quad H_N = K_N \sigma_i \sigma_j \quad (4.44)$$

Définissons

$$\omega' \equiv e^{2K_N} \quad \text{et} \quad \omega \equiv e^{2K_{N-1}} \quad (4.45)$$

On peut regarder quelques réseaux hiérarchiques.

- réseau en diamant :

Ce réseau est représenté à la figure 4.1. Dans ce cas, on trouve, comme on l'a mentionné en (4.42) :

$$\omega' = \left(\frac{\omega^2 + 1}{2\omega} \right)^2 \quad (4.46)$$

- réseau de "Wheatstone" :

Ce réseau est représenté à la figure 4.7 ; il est semblable au réseau en diamant, mais avec un lien supplémentaire entre les deux spins intérieurs d'une même sous-unité. Dans ce cas, on trouve la TGR suivante [Mártin et Tsallis ; 1981] :

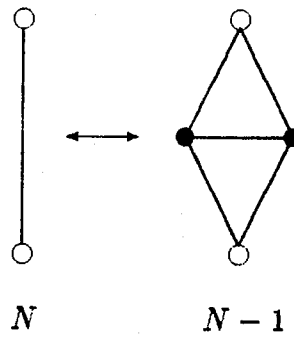


Figure 4.7: Réseau de "Wheatstone".

$$\omega' = \frac{\omega^4 + 2\omega + 1}{2\omega^2 + 2\omega} \quad (4.47)$$

• réseau de Wheatstone non-itéré :

C'est le réseau illustré à la figure 4.5 et qui a servi d'exemple. En plus des liens itérés ordinaires, il y a des liens non-itérés (voir §4.2). On obtient dans ce cas :

$$\omega' = \frac{\omega^4 + 2\alpha\omega + 1}{2\omega^2(1 + \alpha)} \quad (4.48)$$

avec $\alpha \equiv \cosh 2\bar{h}$. Comme on le voit, $\alpha = 0$ redonne (4.46). De plus, il y a une certaine similitude entre les deux réseaux de Wheatstone.

Regardons maintenant les TGR d'un autre modèle ; le modèle de Potts.

4.3.2 Modèle de Potts

Dans ce cas-ci, les hamiltoniens d'un lien primitif sont :

$$H^{(0)} = 2K_0\delta(s_i, s_j) \quad \text{et} \quad H_N = 2K_N\delta(s_i, s_j) \quad (4.49)$$

où δ est un delta de Kronecker (=1 si $s_i = s_j$, 0 autrement). Lorsque l'on compare cet hamiltonien avec celui de §1.2.2 B [voir (1.9)], on constate l'apparition d'un facteur 2 ; ceci amène la correspondance entre les notations utilisées précédemment dans ce chapitre. Ainsi, pour $q = 2$, on retrouve bien le modèle d'Ising décrit ci-haut. Regardons maintenant les résultats obtenus pour différents réseaux hiérarchiques.

- réseau en diamant :

La TGR est donnée par [Derrida, De Seze et Itzykson ; 1983] :

$$\omega' = \left(\frac{\omega^2 + q - 1}{2\omega + q - 2} \right)^2 \quad (4.50)$$

On vérifie bien que $q = 2$ redonne (4.46) ; il en sera de même pour tous les autres réseaux.

- réseau de Wheatstone :

On obtient dans ce cas [Kaufman et Griffiths ; 1984] :

$$\omega' = \frac{\omega^5 + (q-1)(2\omega^2 + \omega + q - 2)}{2\omega^3 + 2\omega^2 + (q-2)(5\omega + q - 3)} \quad (4.51)$$

- réseau de Wheatstone non-uniforme :

Ce type de réseau est illustré à la figure 4.3. Dans ce cas, il y a deux types de liens primitifs ayant une constante de couplage différente : K_N pour les liens non-hachurés, et \bar{K}_N pour les liens hachurés. Définissant :

$$\omega' = e^{2K_N} \quad , \quad \omega = e^{2K_N-1} \quad (4.52)$$

$$\bar{\omega}' = e^{2\bar{K}_N} \quad , \quad \bar{\omega} = e^{2\bar{K}_N-1}$$

les TGR pour les deux types de liens sont [Kaufman et Griffiths ; 1984] :

$$\omega' = \frac{\omega^3 \bar{\omega}^2 + (q-2)(2\omega \bar{\omega} + \omega + q - 2)}{\omega^2 + \bar{\omega}^2 + 2\omega^2 \bar{\omega} + (q-2)(3\omega + 2\bar{\omega} + q - 3)} \quad (4.53)$$

$$\bar{\omega}' = \frac{\bar{\omega}^3 \omega^2 + (q-2)(2\bar{\omega} \omega + \bar{\omega} + q - 2)}{\bar{\omega}^2 + \omega^2 + 2\bar{\omega}^2 \omega + (q-2)(3\bar{\omega} + 2\omega + q - 3)} \quad (4.54)$$

Si $\bar{K}_N = K_N$, on retrouve bien la TGR (4.51) du réseau de Wheatstone uniforme. On retrouvera à l'appendice B les détails des calculs pour ce dernier réseau.

- réseau en diamant généralisé :

La transformation d'un lien primitif est illustrée à la figure 4.8(a). Dans un tel réseau, il y a p lignes reliant les sites de surface, et s liens (sur une ligne donnée) entre les deux sites de surface. La figure 4.8 illustre le cas $p = 3$ et $s = 4$. La TGR est alors donnée par [Ottavi et Albinet ; 1987] :

$$\omega' = \left[\frac{(\omega + q - 1)^s + (q - 1)(\omega - 1)^s}{(\omega + q - 1)^s - (\omega - 1)^s} \right]^p \quad (4.55)$$

On vérifie aisément que $p = s = 2$ redonne le réseau en diamant standard.

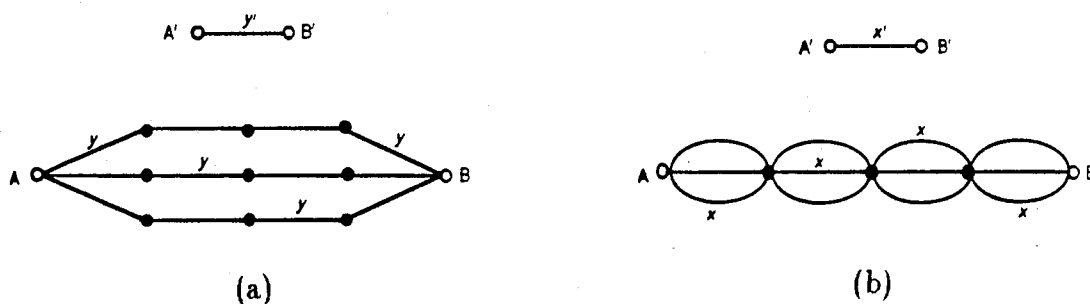


Figure 4.8: Réseaux généralisés pour $p = 3$ et $s = 4$: (a) en diamant ; (b) en collier [Ottavi et Albinet ; 1987].

• réseau en collier généralisé :

Encore une fois, il y a p lignes et s liens ; cependant, les p lignes se rejoignent à tous les "vertexes" (de surface ou intérieurs). La figure 4.8(b) illustre le cas $p = 3$ et $s = 4$. Dans ce cas, la TGR est [Ottavi et Albinet ; 1987] :

$$\omega' = \frac{(\omega^p + q - 1)^s + (q - 1)(\omega^p - 1)^s}{(\omega^p + q - 1)^s - (\omega^p - 1)^s} \quad (4.56)$$

On remarque que dans tous les cas de §4.3.1 et §4.3.2, les TGR sont exactes et sont, de plus, des fonctions rationnelles. Le groupe de renormalisation sur réseau hiérarchique nous amène donc à l'étude de la théorie de l'itération des fonctions rationnelles. Voyons cette théorie dans le plan complexe (plus précisément sur la sphère de Riemann).

Chapitre 5

Théorie de l'itération des fonctions rationnelles sur la sphère de Riemann

Nous allons, dans ce chapitre, donner les éléments mathématiques de la théorie de l'itération des fonctions rationnelles. Notons que plusieurs sujets ne seront pas abordés, telle la classification de Sullivan, ou encore les disques de Siegel ou de Herman, etc. Pour plus de détails sur cette théorie, le lecteur peut se référer à [Blanchard ; 1984], [Brolin ; 1965], [Devaney ; 1987], ou encore aux articles originaux [Julia ; 1918] ou [Fatou ; 1919, 1920 a-b, 1926].

Comme on l'a dit au chapitre précédent, l'application de la méthode du groupe de renormalisation aux réseaux hiérarchiques nous donne des transformations de renormalisation (TGR) exactes ; de plus, ce sont des fonctions rationnelles. On sait aussi que la détermination des propriétés critiques d'un modèle passe par l'étude du comportement des champs d'échelle dans le voisinage d'un point fixe (voir §3.2.3). Or, l'existence d'un tel point fixe est déterminée par l'étude de l'itération de \mathbf{K} sous la TGR R_λ [voir (3.43)] ; cela nous amène naturellement à l'étude de la théorie de l'itération des fonctions rationnelles, pour le cas des modèles hiérarchiques.

De plus, on considère cette théorie dans le plan complexe, *i.e.* que \mathbf{K} peut être complexe. Ceci est plus général que seulement l'étude des \mathbf{K} réels et, comme nous le verrons au chapitre 6, cela conduit à une interprétation géométrique intéressante des points critiques (physiques). Finalement, mentionnons que plusieurs concepts introduits au chapitre 3 seront définis de façon précise dans le présent chapitre.

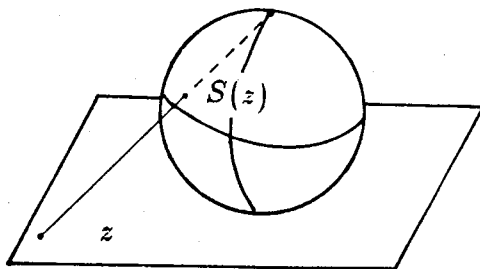


Figure 5.1: La sphère de Riemann [Devaney ; 1987].

Le chapitre sera séparé en trois grandes parties. Dans la première, nous verrons les définitions mathématiques de base. En deuxième partie, les propriétés des différents ensembles étudiés (de Julia, de Fatou, et de type Mandelbrot) seront décrites. Finalement, on donnera une description des différents algorithmes utilisés pour la production graphique des ensembles ; ces algorithmes reposent sur certaines des propriétés qui seront définies auparavant.

5.1 Définitions et notations

Nous nous intéressons à l'étude de la dynamique de systèmes dynamiques discrets sur $\overline{\mathbb{C}}$ générés par une transformation *holomorphe*¹ [Blanchard ; 1984]

$$R : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \quad (5.1)$$

En d'autres termes, notre espace de phase sera la *sphère de Riemann*, unique, simplement connexe, et fermée $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La figure 5.1 illustre cette sphère de Riemann.

Prenons une sphère et plaçons son pôle sud à l'origine du plan complexe \mathbb{C} . A partir du pôle nord, on trace une ligne droite jusqu'à un point z de \mathbb{C} . Cette ligne perce la sphère en un seul point, lequel est dénoté par $S(z)$. Notons que S donne alors un homéomorphisme² de \mathbb{C} sur la sphère moins le pôle nord. Afin de compléter la description, on pose $S(\infty) = \text{pôle nord}$. Vu sous cet angle, "l'espace" $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est

¹Une fonction $f(z)$ est dite holomorphe en z_0 si elle est différentiable en z_0 : c'est une fonction *régulière* au sens de Riemann [Behnke *et al.* ; 1987, Vol.3].

²Une transformation $R : A \rightarrow B$ est dite homéomorphe si l'application de R de A vers B est inversible et bicontinue (*i.e.* continue ainsi que l'application réciproque R^{-1} de B sur A) [Bergé, Pomeau et Vidal ; 1984].

appelé la sphère de Riemann. Intuitivement, elle est construite en enveloppant le plan sur la sphère moins le pôle nord, et le tout est alors collé ensemble en ajoutant le point infini [Devaney ; 1987].

Si $R(z)$ est une fonction rationnelle quelconque de la forme [Blanchard ; 1984]

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (5.2)$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes, alors R induit une carte analytique sur la sphère de Riemann entière ; toute carte holomorphe (analytique) R de $\overline{\mathbb{C}}$ peut s'écrire sous la forme (5.2) avec $P(z)$ et $Q(z)$ des polynômes à coefficients complexes sans facteur commun. Le degré, $\deg(R)$, de toute fonction rationnelle R définie en (5.2) est :

$$\deg(R) = \max \{ \deg(P), \deg(Q) \} \quad (5.3)$$

La théorie que nous allons voir et qui a été développée par Julia et Fatou de façon indépendante entre 1918 et 1920, s'applique aux cartes rationnelles dont le degré est au moins 2. Notons que le degré de R est aussi en général le nombre de préimages de tout point z de $\overline{\mathbb{C}}$ i.e.

$$R^{-1}(z) = \{ z' \in \overline{\mathbb{C}} : R(z') = z \}$$

5.1.1 Eléments de systèmes dynamiques

Un système dynamique est formé par l'application successive de R , de $\overline{\mathbb{C}}$ vers $\overline{\mathbb{C}}$ [voir (5.1)]. Voyons donc quelques définitions utiles en systèmes dynamiques [Blanchard ; 1984].

- Orbite directe de z_0 [$O^+(z_0)$] :

Soit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Alors,

$$O^+(z_0) = \{ z_n \}$$

où la suite $\{ z_n \}$ est donnée par

$$z_{n+1} = R(z_n) .$$

- Orbite inverse de z_0 [$O^-(z_0)$] :

L'orbite inverse est la collection de toutes les préimages de z_0 :

$$O^-(z_0) = \{ z \in \overline{\mathbb{C}} : R^k(z) = z_0 \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots \} .$$

- Point périodique :

Si $z_n = z_0$ pour un certain n , alors z_0 est un point périodique.

- Orbite périodique :

$O^+(z_0)$ est une orbite périodique (ou cycle périodique ou cycle) si z_0 est un point périodique.

- Période :

Premier nombre naturel n tel que $z_n = z_0$.

- Point fixe :

Point périodique de période $n = 1$, i.e. $R(z) = z$.

- Point éventuellement périodique :

Point z pour lequel, pour un certain n , $R^n(z)$ est un point périodique.

- Point prépériodique :

Point z éventuellement périodique, mais non-périodique.

Il est surprenant de constater comment la théorie en question ici dépend de la distribution des points périodiques. Pour illustrer les différents concepts de dynamique que nous venons d'introduire, voyons un exemple simple ; la transformation $z \mapsto z^2$. Soit $R(z) = z^2$. Dans le plan complexe, le comportement des orbites dépend du cercle unitaire S^1 . En effet,

1. $\forall z_0$ intérieur à S^1 , $O^+(z_0)$ tend vers le point fixe $z = 0$ [$R(0) = 0$];
2. $\forall z_0$ extérieur à S^1 , $O^+(z_0)$ tend vers le point fixe $z = \infty$ [$R(\infty) = \infty$].

Cependant, $\forall z_0 \in S^1$, $O^+(z_0)$ demeure sur S^1 , car $R(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ [Blanchard ; 1984].

Nous allons ici ouvrir une petite parenthèse. En théorie des systèmes dynamiques, la relation d'équivalence (conjugaison) est très souvent utile. Si $R(z)$ et $S(z)$ sont deux fonctions rationnelles et si $M(z)$ est une *transformation de Mobius* (i.e. une carte rationnelle bijective) de sorte que le diagramme qui suit commute, alors R et S sont dites *conjuguées* analytiquement. Notons que si R et S sont conjuguées par M , alors R^n et S^n le sont aussi, de sorte que R et S sont holomorphiquement le "même" système dynamique [Blanchard ; 1984]. Alors, la réponse à toute question topologique à propos

du système généré par S peut être obtenue de la réponse à la même question appliquée à R en appliquant la carte M .

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{R} & \overline{\mathbb{C}} \\ M \downarrow & & \downarrow M \\ \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{S} & \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

Une remarque s'impose : R^n signifie l'application de R n fois, ou si l'on veut, l'itération de n fois la carte R ;

$$R^n \equiv R \cdot R \cdot R \dots R \quad n \text{ fois.}$$

Par exemple, il suffit d'étudier une classe de polynômes quadratiques de la forme $z \mapsto z^2 + c$ pour comprendre la dynamique de tous les polynômes quadratiques. Nous fermons ici cette parenthèse : nous sommes intéressés non pas au comportement d'une classe de fonctions rationnelles, mais bien à la topologie spécifique à une carte particulière provenant d'un modèle hiérarchique donné .

Le matériel qui vient d'être présenté est pratiquement tous ce que nous avons besoin de connaître de la théorie des systèmes dynamiques. Il nous faut maintenant introduire quelques concepts supplémentaires provenant de l'analyse complexe. La notion de famille normale est au centre des définitions et propriétés des ensembles de Julia et de Fatou.

5.1.2 Eléments d'analyse complexe

Nous allons considérer plusieurs propriétés spéciales que possèdent les familles de cartes complexes analytiques. Soit $\mathcal{F} = \{F_n\}$ une famille de fonctions analytiques complexes définies sur un ensemble ouvert U de $\overline{\mathbb{C}}$. Dans la plupart des cas, F_n sera la $n^{\text{ième}}$ itération de la carte F , mais pour le moment nous adopterons une approche générale :

- Famille normale :

La famille $\mathcal{F} = \{F_n\}$ est une famille normale sur U si les suites F_n contiennent des sous-suites f_{n_j} telles que :

1. les f_{n_j} convergent uniformément sur des sous-ensembles compacts de U
- ou
2. les f_{n_j} convergent uniformément vers ∞ sur U .

- Famille non-normale :

Une famille \mathcal{F} n'est pas normale en z_0 si la famille n'est pas une famille normale dans tout le voisinage de z_0 .

- Famille équicontinue :

Soit X un espace métrique de métrique d . Une famille de fonctions $\{f_i : X \rightarrow X\}$ est équicontinue si, pour $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(f_i(x_1), f_i(x_2)) < \epsilon, \forall i.$$

Maintenant que l'on possède quelques définitions de départ, voyons certains théorèmes les reliant ([Blanchard ; 1984] et [Devaney ; 1987]).

Théorème 5.1 *La famille de fonctions méromorphiques³ $\{f_i : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}\}$ est une famille normale ssi c'est une famille équicontinue dans tous les sous-ensembles compacts de U .*

Théorème 5.2 *Soit $\{f_i : U \rightarrow \mathbb{C}\}$ une famille holomorphe de fonctions. Si la famille est localement uniformément bornée dans U , alors c'est une famille normale.*

Théorème 5.3 (Théorème de Montel) *Soit \mathcal{F} une famille de fonctions méromorphiques définies dans un domaine U . Supposons qu'il existe des points a, b, c de $\overline{\mathbb{C}}$ tels que $[\cup_{f \in \mathcal{F}} f(U)] \cap \{a, b, c\} = \emptyset$. Alors \mathcal{F} est une famille normale sur U .*

Pour le prochain théorème, nous allons introduire une notation : étant donné $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on désigne le disque ouvert centré en z de rayon r (dans la métrique Euclidienne) par $D_r(z)$ et le symbole D_r représentera le même ensemble que $D_r(0)$.

Théorème 5.4 *Soit $f : D_1 \rightarrow D_1$ une fonction analytique telle que $f(0) = 0$. Alors,*

(a) $|f(z)| \leq |z| \forall z \in D_1$, et

(b) $|f'(0)| \leq 1$.

S'il y a égalité, soit dans (a) pour $\forall z \in D_1 - \{0\}$, ou soit dans (b), alors $f(z) = e^{i\theta} z$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

³Une fonction est dite méromorphe au point z_0 si elle est, ou bien holomorphe (régulière) en ce point, ou encore que la réciproque de la fonction est holomorphe en ce même point. C'est une généralisation de l'holomorphie : ce sont des fonctions régulières, sauf en certains points qui sont des pôles isolés [Behnke et al. ; 1987, Vol.3].

5.1.3 Définition des ensembles de Julia et de Fatou

Maintenant que l'on possède les outils de l'analyse complexe nécessaires, nous pouvons donner une définition précise des ensembles de Julia et de Fatou. Pour les ensembles de type Mandelbrot, il faudra attendre l'introduction de concepts supplémentaires. Comme on l'a déjà mentionné, Julia et Fatou ont étudié les cartes rationnelles R

$$R : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \quad \text{telles que} \quad \deg(R) \geq 2.$$

$\overline{\mathbb{C}}$ se sépare en deux ensembles ; l'ensemble de Julia (J) et l'ensemble de Fatou (F). Voici leur définition respective [Blanchard ; 1984] :

- Ensemble de Fatou :

Un point $z \in \overline{\mathbb{C}}$ est un élément de l'ensemble de Fatou (F_R), pour une carte R , s'il existe un voisinage U de z dans $\overline{\mathbb{C}}$ tel que la famille d'itérations $\{R^n(U)\}$ est une famille normale.

- Ensemble de Julia :

L'ensemble de Julia (J_R), pour une carte R , est le complément de F_R :

$$J_R = \overline{\mathbb{C}} \setminus F_R$$

Ces définitions ne sont pas très intuitives. On peut cependant définir ces ensembles autrement, par l'étude des points périodiques. En plus de donner une meilleure idée de ce que sont ces ensembles, cela nous permettra de donner plusieurs propriétés des ensembles en question.

Avant d'aborder les points périodiques, nous pouvons donner un exemple simple des deux ensembles. Considérons l'exemple donné plus haut avec $R(z) = z^2$. Soit z_0 un point situé à l'intérieur du cercle unitaire S^1 . Il existe alors un disque ouvert U autour de z_0 pour lequel $R^n(U)$ converge vers la fonction constante $C(z) = 0 \forall z \in U$. L'intérieur de S^1 est donc un sous-ensemble de F_R . De la même façon, l'extérieur du cercle unitaire est aussi un sous-ensemble de F_R , bien que la fonction limite soit différente $C(z) = \infty$. Cependant, le cercle unitaire S^1 est égal à J_R car la famille $\{R^n\}$ est non-équicontinue sur tout ensemble ouvert U qui intercepte S^1 . Nous verrons qu'en général les ensembles de Julia ont un caractère fractal, contrairement à l'exemple donné ci-haut.

Avant de commencer la discussion sur la dynamique dans le voisinage de points périodiques, nous allons donner une définition supplémentaire [Blanchard ; 1984].

- Valeur propre d'une orbite périodique :

La valeur propre d'une orbite périodique est donnée par

$$\lambda_{z_0} \equiv (R^n)'(z_0)$$

où $' \equiv \frac{d}{dz}$ et z_0 est un point périodique de période n .

Bien entendu, la dérivation en chaîne implique que λ_{z_0} est le produit des dérivées de la carte R le long de l'orbite. En conséquence, λ_{z_0} est un invariant de l'orbite $O^+(z_0)$ plutôt que d'un point particulier z_0 . A partir d'ici, on laisse tomber l'indice z_0 on l'on écrit seulement λ . Dépendamment de la valeur de λ , la dynamique sera très différente. On distingue quatre cas.

Par définition, une orbite périodique $O^+(z_0)$ est :

- attractive si $0 < |\lambda| < 1$,
- superattractive si $\lambda = 0$,
- répulsive si $|\lambda| > 1$, ou
- neutre si $|\lambda| = 1$.

On ne touchera pas le cas neutre, car il est plus difficile à traiter et l'on peut définir l'ensemble de Julia (et celui de Fatou) à partir des autres cas [Blanchard ; 1984].

A. Points périodiques attractifs et répulsifs

Proposition 5.1 *Si $O^+(z_0)$ est une orbite (super)attractive, alors elle est contenue dans F_R . Si elle est une orbite répulsive, alors elle est contenue dans J_R .*

Finalement, le cas attractif est complètement décrit par un théorème [Blanchard ; 1984] :

Théorème 5.5 *Soit z_0 un point associé à une orbite périodique attractive de période n . Il existe un voisinage U de z_0 et un homéomorphisme analytique unique $\phi : U \rightarrow D_r$, (pour un certain r) tel que :*

$$\phi(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \phi'(z_0) = 1$$

et que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{R^n} & U \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\
 D_r & \xrightarrow{z \mapsto \lambda z} & D_r
 \end{array}$$

De ce théorème, il découle que U est invariant vers l'avant, i.e. $R^n(U) \subset U$ et l'orbite de tous les points de U a pour asymptote $O^+(z_0)$.

B. Cas superattractif

Le théorème qui va suivre s'applique à toute fonction analytique, non seulement aux fonctions rationnelles. Notons que $(R^n)^{(k)}(z_0)$ représente la $k^{\text{ième}}$ dérivée de R^n .

Théorème 5.6 Soit $O^+(z_0)$ une orbite périodique superattractrice. Supposons $k \geq 2$, $(R^n)^{(k)}(z_0) \neq 0$, et

$$(R^n)'(z_0) = (R^n)^{(2)}(z_0) = \dots = (R^n)^{(k-1)}(z_0) = 0.$$

Alors, il existe un voisinage U de z_0 et un homéomorphisme analytique $\phi : U \rightarrow D_r$ (pour un certain r) tel que $\phi(z_0) = 0$, $\phi'(z_0) = 1$, et que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{R^n} & U \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\
 D_r & \xrightarrow{z \mapsto z^k} & D_r
 \end{array}$$

On interprète ce théorème comme le précédent, i.e. que U est un invariant vers l'avant et que l'orbite est asymptotique. La seule différence est que la carte $z \mapsto z^k$ ne peut être inversée localement [Blanchard ; 1984].

Maintenant que l'on possède tout l'outillage nécessaire, nous pouvons décrire de manière détaillée les ensembles de Julia et de Fatou.

5.2 Propriétés des différents ensembles

Nous allons dans cette section donner les principales propriétés découlant des différents théorèmes et définitions de la section précédente. Nous verrons d'abord l'ensemble de Julia : puisque l'ensemble de Fatou en est le complément, il s'en trouvera bien défini. Ensuite, nous ferons une description succincte de l'ensemble de Mandelbrot (M) et des concepts mathématiques s'y rapportant (les points critiques au sens mathématique).

5.2.1 Ensembles de Julia

On peut donner plusieurs définitions de J_R . En voici quatre [Blanchard ; 1984] :

- Soit $\{F^n\} = \{R^n(U)\}$ une famille d'itérations dans un voisinage U de z pour une carte $R(z)$. Alors,

$$J_R = \{z \mid \{F^n\} \text{ n'est pas normale en } z\} .$$

- Si $z \in J_R$, alors

$$J_R = \text{fermeture} \left(\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z) \right) .$$

- Soit P l'ensemble de tous les points périodiques répulsifs de R . Alors,

$$P \text{ est dense dans } J_R .$$

- J_R est égal à la fermeture des points périodiques répulsifs, *i.e.* que si $\bar{z} \in \bar{\mathbb{C}}$ est un point périodique répulsif, et que

$$J_R^n = \{z \in \bar{\mathbb{C}} \mid R^k(z) = \bar{z} \text{ pour } k \leq n\}$$

- alors

$$J_R = \text{fermeture} \left(\bigcup_{n \geq 0} J_R^n \right) .$$

Ces deux dernières définitions signifient que chaque point de J_R est la limite d'une suite de points de P . Bien entendu, on peut aussi définir J_R par l'intermédiaire des bassins d'attraction [Peitgen et Richter ; 1986].

- bassin d'attraction $A(z_0)$ d'un point fixe z_0 :

Si z_0 est point fixe attractif, alors on a :

$$A(z_0) = \{z \in \overline{C} \mid R^n(z) \rightarrow z_0 \text{ pour } n \rightarrow \infty\} .$$

- bassin d'attraction immédiat $A^*(z_0)$:

Bassin $A(z_0)$ dans lequel le point z_0 est contenu.

- bassin d'attraction d'un cycle $A(\gamma)$:

Si γ est un cycle attractif de période n , alors chacun des points fixes $R^i(z_0), i = 0, 1, \dots, n-1$, de R^n possède son bassin immédiat $A(z_k)$. $A(\gamma)$ n'est alors que l'union de ces bassins immédiats :

$$A(\gamma) = \bigcup_{k=0}^{n-1} A(z_k) .$$

Notons que les bassins $A(z_0)$ collectent tous les points z dont l'orbite directe $O^+(z)$ approche z_0 . Bien entendu, ces ensembles contiennent aussi l'orbite inverse de z_0 , i.e. $O^-(z_0)$.

Alors on peut écrire :

- Si γ est un cycle attractif, alors $\partial A(z_0) \subset J_R$ et $\partial A(\gamma) = J_R$, où ∂A signifie la frontière du bassin d'attraction.

Avant de donner une liste de propriétés des ensembles de Julia, il faut mentionner l'existence d'un certain type de points un peu particulier : les *points exceptionnels*.

- Points exceptionnels :

Soit $z \in J_R$. Si U est un voisinage de z , alors l'ensemble $E_U = \overline{C} - \bigcup_{n>0} R^n(U)$ contient au plus deux points. Ces points sont appelés des points exceptionnels.

Il est à noter que pour les polynômes, ∞ est un point exceptionnel. Etant donné la rareté de ces points, nous n'en dirons pas plus sur le sujet [Blanchard ; 1984].

Nous allons maintenant donner une liste des principales propriétés des ensembles de Julia ; le lecteur désireux d'en connaître plus sur celles-ci peut se référer à [Blanchard ; 1984], [Devaney ; 1987], ou [Peitgen et Richter ; 1986].

- J_R est un ensemble parfait ⁴ : il est donc non-dénombrable.
- $J_R \neq \emptyset$.
- $J_R = J_{R^n}$ i.e. que les ensembles de Julia de R et de R^n pour $n = 1, 2, \dots$ sont identiques.
- J_R est complètement invariant, i.e. $R(J_R) = J_R = R^{-1}(J_R)$.
- Soit R un polynôme quelconque. Alors J_R n'a pas d'intérieur vide. C'est la propriété qui n'est pas valide pour les cartes rationnelles en général.
- Si J_R possède des points intérieurs (i.e. des points $\bar{z} \in J_R$ tels que pour un certain $\epsilon > 0$ $\{z : |z - \bar{z}| < \epsilon \subset J_R\}$), alors J_R est la sphère de Riemann au complet :
Si $\text{int}(J_R) \neq \emptyset$, alors $J_R = \overline{\mathbb{C}}$.
Cette situation est plutôt rare, mais la carte $R(z) = [(z-2)/z]^2$ en est un exemple.
- R est chaotique sur J_R , i.e. que la valeur z après un certain nombre d'itérations dépend beaucoup de la valeur de départ.
- De la dernière propriété découle la suivante : si U est un ensemble ouvert quelconque coupant J_R , il existe alors un entier n pour lequel $R^n(U \cap J_R) = J_R$, i.e. que l'on peut reconstruire J_R à partir d'un seul point. Cette propriété se traduit souvent par l'auto-similarité, qui est l'un des traits caractéristiques des ensembles fractals.

En terminant, mentionnons que les ensembles de Julia se regroupent en deux classes géométriquement différentes : ensembles connexes et ensembles de Cantor. La première catégorie consiste en des ensembles où les points de J_R forment des frontières entre différents bassins d'attraction : ces frontières sont nécessairement connexes i.e. "continues" (sinon J_R ne serait pas la frontière entre les bassins). Notons qu'il existe des cas où J_R est connexe mais n'est pas la frontière entre des bassins différents : on appelle ces ensembles des *dendrites*. Ils sont reliés à l'existence de points exceptionnels (comme ∞ par exemple). Dans le deuxième cas, la situation est très différente : les points appartenant à J_R ne forment pas une frontière entre de bassins, mais les ensembles de Julia sont plutôt formés en nuages de points. On dit alors qu'ils sont simplement non-connexes. On appelle souvent les ensembles de Cantor *poussières de Fatou*. La figure 5.2

⁴Un ensemble est dit parfait s'il est dense dans lui-même et fermé [Behnke et al. ; 1987, Vol.3].

illustre quelques cas de J_R pour $R(z) = z^2 + c$, où c est une constante complexe. Voilà qui termine un survol des principales propriétés des ensembles de Julia.

Regardons maintenant quelques-unes de celles des ensembles de Fatou.

- L'ensemble de Fatou F_R ne peut contenir plus de deux composantes différentes, simplement connexes et complètement invariantes.
- La frontière de toute composante complètement invariante de F_R est l'ensemble de Julia J_R .
- Si le nombre de composantes de F_R est fini, alors il y en a au plus deux.
- Toute composante de F_R est éventuellement périodique.

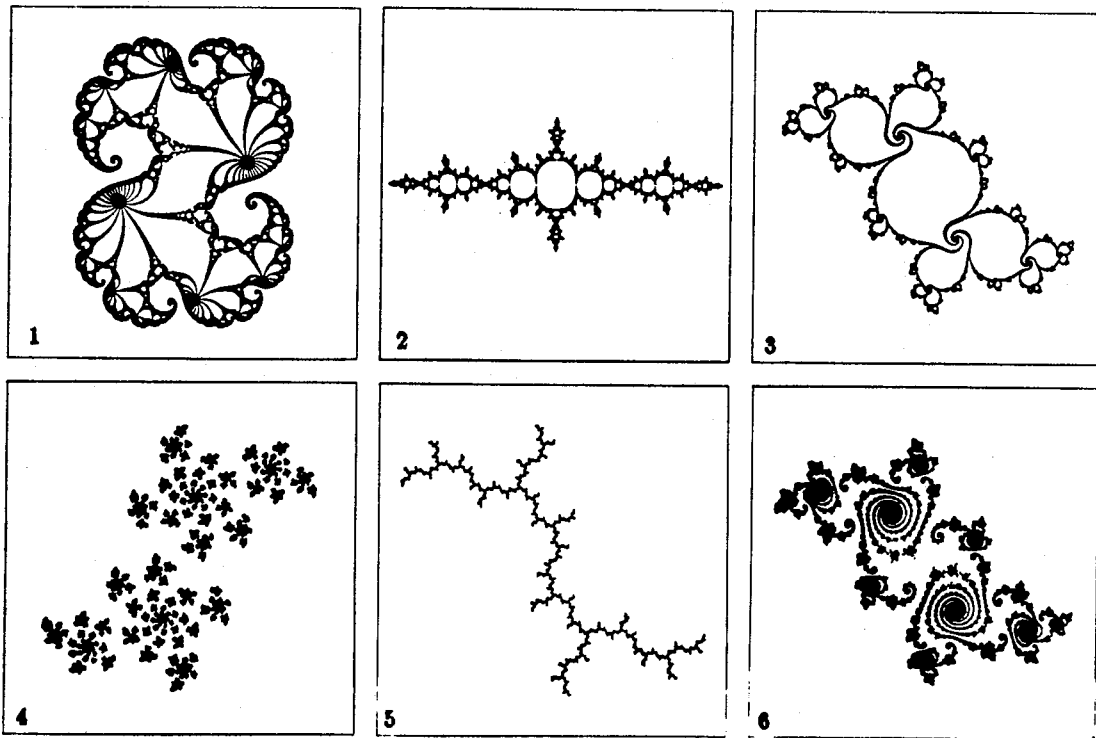


Figure 5.2: Ensembles de Julia typiques pour $z \mapsto z^2 + c$. Les trois premiers sont des ensembles connexes séparant plusieurs bassins d'attraction, le quatrième et le dernier sont des ensembles de Cantor, et le cinquième est une dendrite [Peitgen et Richter ; 1986].

Notons qu'il existe une classification complète des ensembles de Fatou reposant sur les bassins d'attraction immédiats et comportant cinq cas possibles [Blanchard ; 1984]. Voyons maintenant l'ensemble de Mandelbrot.

5.2.2 Ensemble de Mandelbrot

Afin de bien décrire les ensembles de type Mandelbrot, il nous faut introduire la notion de point critique (au sens mathématique). En effet, plusieurs aspects de la dynamique des cartes rationnelles sont intimement liés à la dynamique de ces points critiques.

- points critiques :

Un nombre $c \in \overline{\mathbb{C}}$ est une *valeur critique* de R si l'équation

$$R(z) - c = 0$$

possède un zéro dégénéré, *i.e.* un zéro de multiplicité supérieure à 1. Pareil zéro est appelé *point critique*. Les points critiques finis sont solutions de

$$R'(z) = 0.$$

- De l'ensemble des points critiques \mathcal{C} , on définit un sous-ensemble \mathcal{C}' ne regroupant que les points critiques finis.

Si $d = \deg(R)$, alors on aura les résultats suivants [Blanchard ; 1984] :

- Le nombre de points critiques de R est au plus $2d - 2$.
- Le nombre d'orbites périodiques attractives est au plus $2d - 2$.
- Le nombre d'orbites périodiques plus la moitié du nombre d'orbites périodiques neutres est au plus $2d - 2$.
- Supposons que chaque point critique de R est prépériodique. Alors, $J_R = \overline{\mathbb{C}}$.

L'ensemble de Mandelbrot a pour objet l'étude de la dynamique des polynômes quadratiques $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Comme on l'a déjà mentionné en §5.1, $p(x)$ est conjuguée à

$$p_c(z) = z^2 + c$$

avec

$$x \mapsto z = a_2 x + \frac{a_1}{2} \quad \text{et} \quad c = a_0 a_1 + \frac{a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{2}\right)$$

Puisque $d = 2$, il y a au plus deux points critiques et deux orbites périodiques attractives. Les points critiques de $p_c(z)$ sont $\{0, \infty\}$. Or ∞ est aussi un point superattractif, de sorte que l'ensemble de Julia J_c sera la frontière du bassin de ∞ : $J_c = \partial A(\infty)$.

D'autre part, on sait qu'il existe deux classes d'ensembles de Julia ; les ensembles connexes et les ensembles non-connexes (de Cantor). Pour des polynômes $p(z)$ (seulement), on peut donner deux théorèmes permettant de distinguer les deux classes d'ensembles [Blanchard ; 1984].

Théorème 5.7 *Les déclarations suivantes sont équivalentes :*

1. La carte $p(A(\infty))$ est conjuguée analytiquement à la carte $z \mapsto z^d$ restreinte à l'extérieur du cercle unitaire.
2. L'ensemble $A(\infty)$ est simplement connexe.
3. L'ensemble de Julia $J(p)$ est connexe.
4. Les ensembles $A(\infty)$ et C' sont disjoints. En d'autres termes, pour chaque point critique z fini, la suite des images successives $p^n(z)$ reste bornée.

Théorème 5.8 *Supposons que $C' \subset A(\infty)$. Alors $J(p)$ est totalement non-connexe.*

Examinons la dynamique des points critiques de $p_c(z)$. D'abord, le point critique ∞ est un peu spécial : pour des polynômes, c'est un point exceptionnel en plus d'être un point superattractif. Il est facile de voir que $p_c(\infty) = \infty \forall c$. Alors $\infty \in A(\infty)$, et ce point conduit donc à des ensembles de Julia non-connexes (de Cantor ou poussières de Fatou) [Blanchard ; 1984]. D'autre part, le point critique 0 peut avoir deux comportements dépendamment de la valeur de c :

1. Si $0 \in A(\infty)$, alors la séquence $O^+(0)$ converge vers l'infini et J_c est totalement non-connexe,
2. Si $0 \notin A(\infty)$, alors $A(\infty)$ est simplement connexe et J_c est connexe.

A partir de cette dichotomie des ensembles de Julia, on peut définir un ensemble dans l'espace des constantes complexes c : l'ensemble de Mandelbrot.

- Ensemble de Mandelbrot M : $M = \{c \in \mathbb{C} \mid J_c \text{ est connexe}\}$

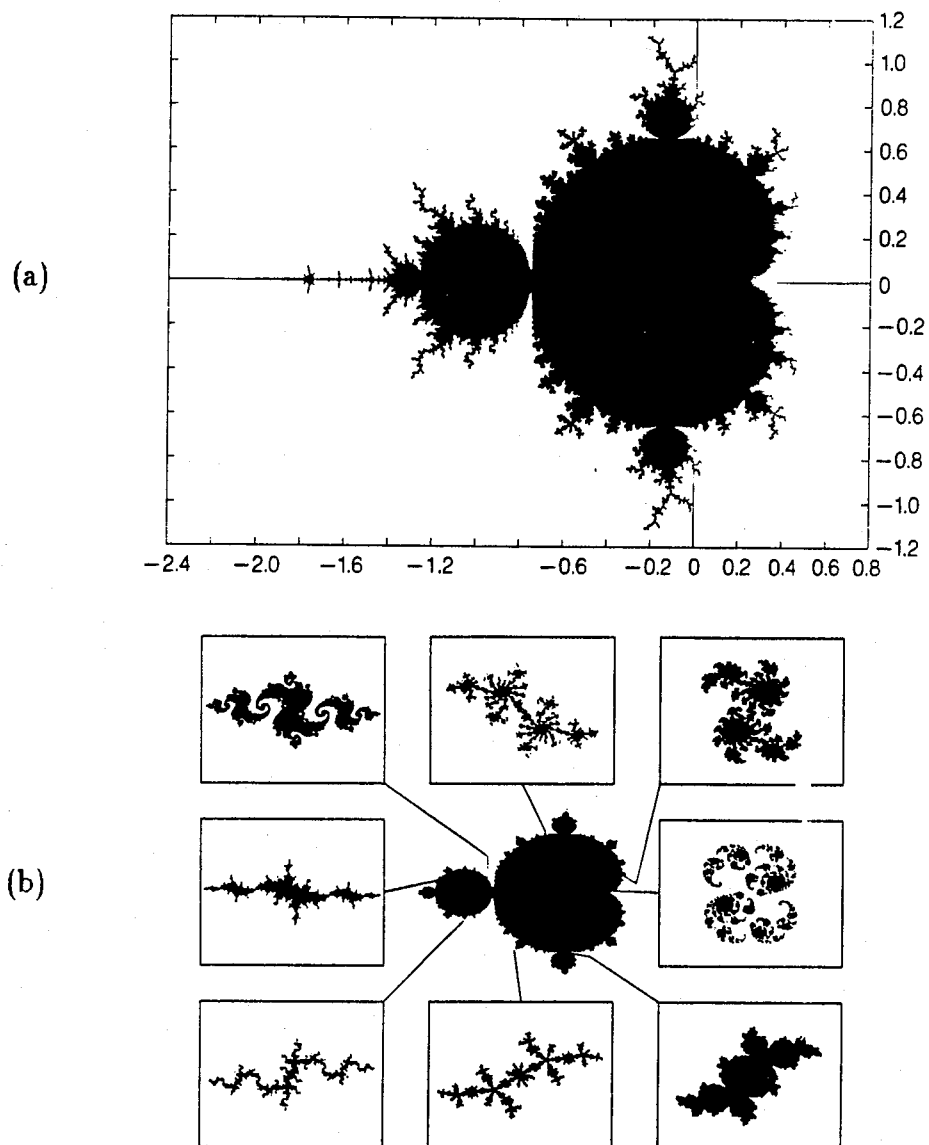


Figure 5.3: Ensemble de Mandelbrot : (a) ses coordonnées [Peitgen et Richter ; 1986] ; (b) ensembles de Julia correspondant [Barnsley ; 1988].

D'après les théorèmes ci-haut, on peut définir M autrement :

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid |p_c^k(0)| \not\rightarrow \infty \text{ pour } k \rightarrow \infty\}$$

Cette dernière définition permet de construire des algorithmes numériques pour tracer l'ensemble de Mandelbrot. La figure 5.3 illustre d'ailleurs cet ensemble de Mandelbrot. Donc, pour tous les c à l'intérieur de M , les ensembles de Julia sont connexes, alors qu'à l'extérieur de M , on obtient des poussières de Fatou. Finalement, on obtient des dendrites pour c situé sur les antennes de M (voir les figures 5.2 et 5.3).

Certaines propriétés supplémentaires de M ont été démontrées :

- M est un ensemble connexe.
- $M \subset \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}$.

En terminant cette sous-section, mentionnons que l'on peut définir des ensembles de type Mandelbrot pour d'autres cartes que la carte quadratique. Si l'on considère le modèle hiérarchique en diamant par exemple, on a la carte rationnelle suivante :

$$R(z) = \left(\frac{z^2 + q - 1}{2z + q - 2} \right)^2$$

Alors, on trouve :

- points fixes attractifs : $z = 1, \infty$.
- points critiques : $z = 1, \infty, 1 - q, \pm \sqrt{1 - q}, \frac{2-q}{2}$.

Examinons la dynamique des différents points critiques. Les points 1 et ∞ sont déjà reconnus comme des points fixes attractifs, de sorte qu'ils restent sur eux-mêmes à chaque itération. Le point $(2 - q)/2$ est projeté à l'infini dès la première itération et y demeure par la suite. $\pm \sqrt{1 - q}$ sont tous les deux projetés sur 0, de sorte qu'il nous suffit de connaître la dynamique des points 0 et $1 - q$. On définit alors les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{q \in \mathbb{C} : R^n(0) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty\} \\ A_2 &= \{q \in \mathbb{C} : R^n(0) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\} \\ M_1 &= \mathbb{C} \setminus (A_1 \cup A_2) \\ \\ A_3 &= \{q \in \mathbb{C} : R^n(1 - q) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty\} \\ A_4 &= \{q \in \mathbb{C} : R^n(1 - q) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\} \\ M_2 &= \mathbb{C} \setminus (A_3 \cup A_4) \end{aligned}$$

On peut montrer que [Peitgen et Richter ; 1984] :

$$\begin{aligned} A_1 &= A_4 \\ A_2 &= A_3 \\ M_1 &= M_2 \end{aligned}$$

En effet,

$$R = \phi \circ S^2 \circ \phi$$

avec

$$\phi(z) = \frac{(z + q - 1)}{(z - 1)} \quad \text{et} \quad S(z) = \frac{(z^2 + q - 1)}{(z^2 - 1)}$$

On voit bien que $R^n(0) \rightarrow 1$ pour $n \rightarrow \infty$ *ssi* $R^n(1 - q) \rightarrow \infty$ pour $n \rightarrow \infty$, et que $R^n(0) \rightarrow \infty$ pour $n \rightarrow \infty$ *ssi* $R^n(1 - q) \rightarrow 1$ pour $n \rightarrow \infty$. Voyons maintenant les différents algorithmes développés pour produire les ensembles de Julia, de Fatou et de type Mandelbrot.

5.3 Production graphique des différents ensembles

Nous allons ici donner les grandes lignes des algorithmes utilisés pour la production graphique des ensembles de Julia, de Fatou, et de type Mandelbrot. Pour les ensembles de Julia et de Fatou, on se sert des mêmes algorithmes puisque ces ensembles sont les compléments l'un de l'autre : en traçant la frontière de F_R on trace J_R . Deux méthodes ont été développées à cette fin : l'une utilisant l'orbite inverse, et l'autre l'orbite directe. Pour les ensembles de type Mandelbrot, la technique repose sur l'itération directe.

5.3.1 Ensembles de Julia et de Fatou

Comme on l'a déjà mentionné plus haut, deux stratégies sont adoptées pour tracer les ensembles de Julia. Chacune possède des avantages et des inconvénients.

A. Méthode par itération inverse (MII)

Cette méthode est basée sur la propriété suivante [Peitgen et Richter ; 1986] :

- Si $z \in J_R$, alors l'orbite inverse $O^-(z)$ est dense dans J_R .

ou si l'on veut,

- Si $z \in J_R$, alors

$$J_R = \text{fermeture} \left(\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z) \right)$$

De plus, puisque l'ensemble des points périodiques répulsifs P est dense dans J_R , i.e. que J_R est égal à la fermeture des points périodiques répulsifs, on peut calculer l'ensemble suivant :

Soit un point périodique répulsif $\bar{z} \in J_R$, on calcule alors ;

$$J_R^n = \{z \in \bar{C} \mid R^k(z) = \bar{z} \text{ pour } k \leq n\}$$

Puisque

$$J_R = \text{fermeture} \left(\bigcup_{n \geq 0} J_R^n \right)$$

alors, pour un n assez grand, J_R^n devrait reproduire J_R . Intuitivement, la méthode revient à ceci :

1. On prend un point quelconque $z_0 \in \bar{C}$,
2. On l'itère en sens inverse. Notons que pour une carte R de degré d , il y aura d préimages. On garde l'ensemble de ces points :

$$\{z_{-1}\} = R^{-1}(z_0)$$

3. On prend les préimages et l'on itère à nouveau en sens inverse. En faisant cette opération plusieurs fois, on trouvera J_R^n à une erreur $\epsilon > 0$ près :

$$\begin{aligned} \{z_{-k}\} &= R^{-k}(z_0) \\ D(z, \epsilon) &= \{z_{-k} : |z_{-k} - z| < \epsilon \text{ avec } z \in J_R\} \end{aligned}$$

de sorte que

$$J_R^n = D(z, \epsilon) \text{ à } \epsilon \text{ près pour } k \text{ grand.}$$

Donc, on peut reproduire J_R avec une certaine précision ϵ en itérant un point de départ z_0 quelconque en sens inverse. Illustrons ceci.

Considérons un ensemble de Julia J_R tel que représenté à la figure 5.4. Si $\bar{z} \in J_R$, alors l'itération suivante $\bar{z}' = R(\bar{z})$ donne aussi un point de J_R , car J_R est complètement invariant. Donc, à partir d'un point de J_R on peut reconstruire J_R au complet. Notons que $R(J_R)$ est chaotique comme tente de le montrer la figure 5.4.

Maintenant, prenons un point légèrement à côté de J_R , à un ϵ près : $|z - \bar{z}| < \epsilon$. Lorsque l'on itère z en sens direct, ce point se déplace vers son attracteur et s'éloigne donc de J_R :

$$R^n(z) \rightarrow z_0, \text{ pour } n \rightarrow \infty$$

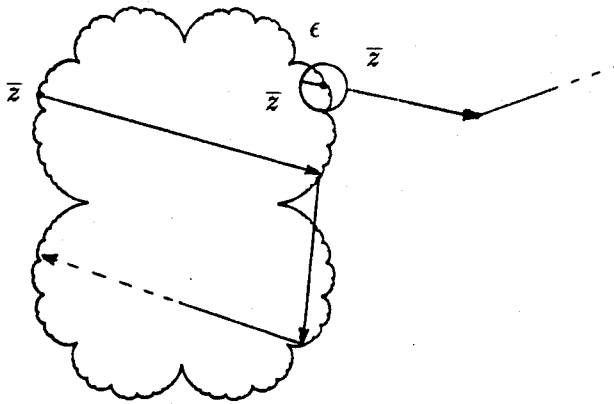


Figure 5.4: Ensemble de Julia fictif.

avec z_0 un point fixe attractif.

On peut inverser le processus. Si l'on prend un point $z \neq z_0$ quelconque, l'itération inverse de z un grand nombre de fois nous amènera vers J_R à ϵ près. On aura alors (pour une préimage seulement) ;

$$z_{-k} = R^{-k}(z)$$

$$z_{-k} \simeq z \in J_R, \text{ pour } k \text{ grand.}$$

Lorsque l'on a obtenu un point z_{-k} que l'on considère appartenir à J_R (à un ϵ près), on peut reconstruire J_R par itération inverse, car $R^{-1}(J_R) = J_R$. Notons que l'itération directe nous redonnerait le point fixe attractif. Donc, on reconstruit J_R par itération inverse à partir d'un point de départ quelconque.

Comme on l'a mentionné, après n itérations, il y a d^n points à itérer à la prochaine itération inverse ; il est rapidement impossible de suivre les orbites inverses de toutes les préimages. Il faut donc en suivre certaines et en laisser tomber d'autres. On obtient alors la méthode par itération inverse modifiée.

A'. Méthode par itération inverse modifiée (MIIM)

Pour des raisons d'espace mémoire (des ordinateurs), il nous faut garder qu'une seule préimage à chaque étape. On peut adopter plusieurs stratégies à cette fin : en garder une au hasard, en choisir une de façon systématique, ou en choisir une qui optimise la formation de J_R . Les deux premiers choix donnent la MII. Or, lorsque l'on suit l'orbite inverse $O^-(z)$ d'un point $z \in J_R$, on constate que les différentes régions de J_R ne sont pas visitées de façon égale : certaines régions se trouvent visitées souvent, alors que d'autres le sont très rarement. Ainsi, pour avoir un support de J_R acceptable, la MII devrait être itérée un très grand nombre de fois, ce qui est coûteux en temps de calcul.

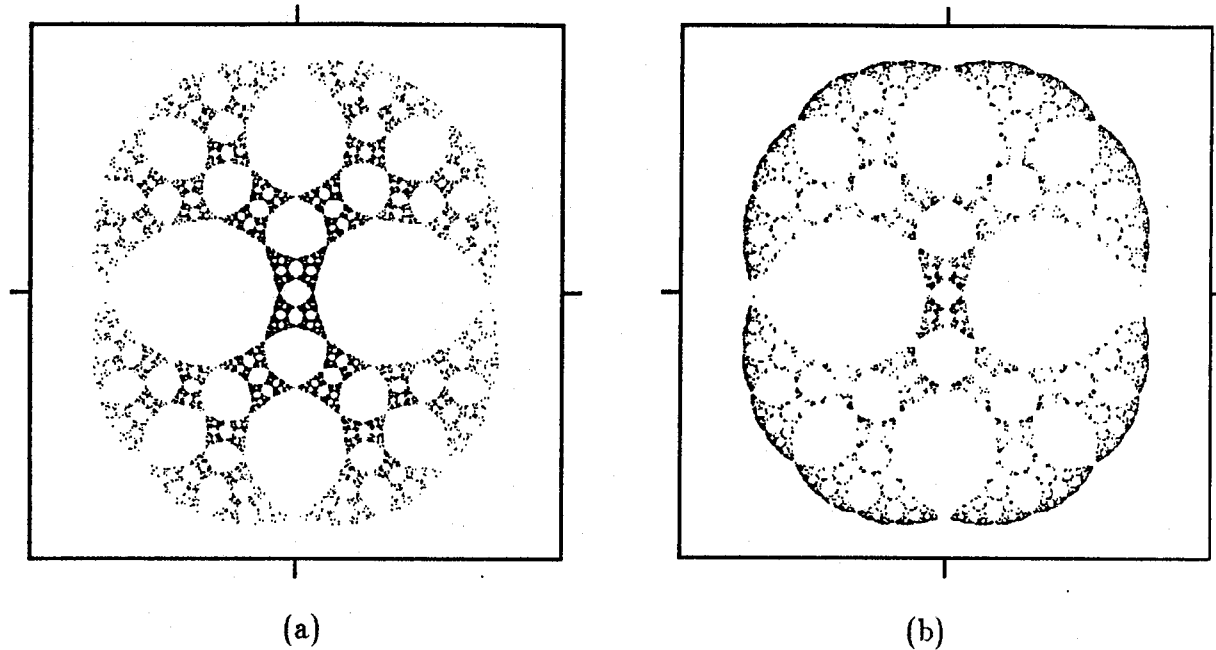


Figure 5.5: Résultats par itération inverse pour 30 000 points : (a) MII ; (b) MIIM.

La solution adoptée est alors le dernier choix : l'optimisation de la formation de J_R . Cela consiste à ne garder que la préimage de l'ensemble des d préimages qui se situe dans la région de J_R la moins *peuplée* [Peitgen et Richter ; 1986].

Pour ce faire, il suffit de séparer notre domaine en plusieurs sous-domaines et de vérifier dans lequel de ces sous-domaines se trouve chacune des préimages ; on choisit alors la préimage contenue dans le sous-domaine le moins peuplé, *i.e.* dont le compteur est le plus bas. On incrémente alors ce compteur et l'on recommence ces étapes à chaque itération inverse. Les résultats obtenus sont bien meilleurs par cette méthode (MIIM) que par la MII, comme le montre la figure 5.5.

Le seul problème avec cette méthode provient du calcul des préimages : si l'on ne connaît pas les expressions analytiques de R^{-1} , cela demande une somme énorme de calculs numériques pour chaque préimage, ce qui augmente le temps requis pour obtenir J_R . De plus, il faut choisir les sous-domaines de façon optimale.

Voyons une autre méthode reposant sur d'autres propriétés de J_R .

B. Méthode de localisation des frontières (MLF)

Cette méthode repose sur la propriété suivante [Saupe ; 1987] :

$$J_R = \partial A(\gamma)$$

S'il y a deux bassins d'attraction ou plus, alors

$$J_R = \partial A(a) = \partial A(b) = \dots$$

où a, b, \dots sont des points fixes attractifs. Il s'agit donc de trouver les frontières des bassins.

On choisit une région carrée de \bar{C} où l'on désire générer J_R . Soit B une boîte de largeur β contenue dans ce domaine. Si $B \cap J_R \neq \emptyset$, alors B doit contenir des points appartenant à $A(a)$ et $A(b)$.

Ceci suggère la stratégie suivante. Considérons les quatre coins c_1, c_2, c_3 et c_4 de B . On vérifie alors :

- si les coins appartiennent tous au même bassin, ou
- si les coins appartiennent à des bassins différents.

Supposons que B soit un pixel, *i.e.* que la taille de B soit égale à la résolution de notre image. Alors on allume le pixel si J_R y passe (ce qui correspond au deuxième cas) et l'on considère que $B \in J_R$ (à la résolution considérée), sinon il demeure éteint.

Afin de déterminer si B appartient ou non à J_R , on vérifie les conditions :

- si, pour $k \leq n_{max}$, on trouve $|R^k(c_i) - a| < \epsilon$, alors $c_i \in A(a)$,
- sinon $c_i \notin A(a)$.

avec n_{max} un nombre maximal d'itération et ϵ le rayon d'un disque de convergence. Bien entendu, ces paramètres, de même que β , introduisent certaines erreurs (dites de résolution).

Remarquons que cette méthode, bien que valide pour les cas où il y a au moins deux bassins d'attraction, permet de bien caractériser la dynamique de ces bassins, *i.e.* la dynamique de F_R . En effet, si au lieu de laisser le pixel éteint lorsqu'il appartient à

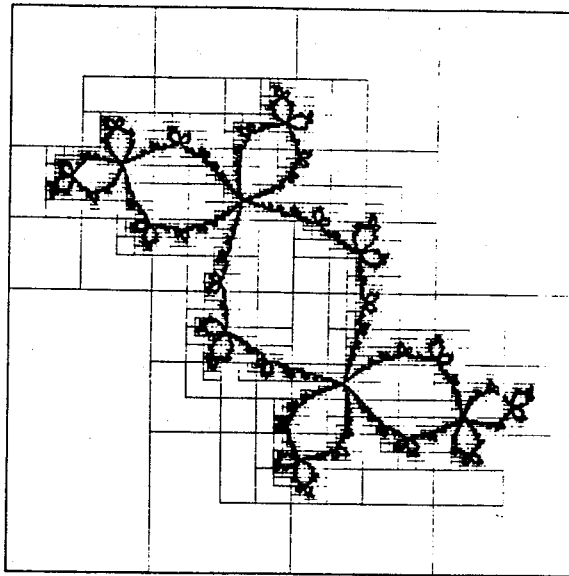


Figure 5.6: J_R pour $R(z) = z^2 - 0,12 + 0,74i$ [Saupe ; 1987].

un seul bassin, on lui donne une certaine couleur : on pourra connaître la dynamique de F_R . Par exemple, on peut donner la couleur noir pour les pixels $\in J_R$. Ensuite, on choisit une couleur pour chaque bassin d'attraction : rouge pour $A(a)$, vert pour $A(b)$, etc. Finalement, lorsqu'un pixel fait partie d'un bassin, on lui donne un ton de la couleur du bassin. Ce ton est choisi d'après le nombre d'itérations k nécessaires pour atteindre le disque de convergence de rayon ϵ . Par exemple, pour $A(a)$, on donnera orange pour $k = 1$, rouge pâle pour $k = 2$, etc. On obtiendra ainsi une carte dynamique couleur nous permettant de suivre la dynamique de F_R , tout en donnant J_R .

Notons que pour créer une image de 512×512 pixels (par exemple), cette méthode demande d'itérer $4 \times 512 \times 512$ coins et de faire beaucoup de tests. Ceci prend énormément de temps machine et, compte-tenu du fait que certaines régions loins de J_R sont examinées inutilement, un grand nombre de calculs exécutés le sont gratuitement. Afin de rendre cette méthode plus efficace, on peut la modifier un peu.

B'. Méthode de localisation des frontières modifiée (MLFM)

Dans ce cas, au lieu de considérer un pixel au départ, on prend des régions plus grandes. Lorsqu'une région contient une frontière, on la sépare en quatre sous-régions pour lesquelles on refait les mêmes tests. Si une région ne contient pas de frontière, on ne la sépare pas et cette région ne se trouve plus visitée par la suite. On recommence ces étapes jusqu'à ce que l'on obtienne la résolution désirée. La figure 5.6 illustre les différents domaines. Cette méthode permet de sauver beaucoup d'opérations inutiles.

En effet, certains coins de pixels ayant déjà été calculés, on sauve plusieurs calculs en les gardant en mémoire : seuls ceux qui n'ont pas déjà été calculés le seront par la suite. De plus, les régions qui ne sont pas susceptibles de contenir J_R ne sont pas explorées pour rien. En bref, on suit les étapes suivantes [Saupe ; 1987] :

- On prend un bloc d'une étape n donnée.
- S'il est allumé , alors on le sépare en quatre. Pour chacun de ces quatre sous-blocs, on fait les trois étapes suivantes :
 1. on identifie les quatre coins du sous-bloc de l'étape $n + 1$.
 2. pour chacun des coins, on vérifie s'il a déjà été itéré . Si oui, on passe au coin suivant, sinon on l'itère.
 3. on vérifie si une frontière passe par le sous-bloc :
 - si oui, on l'allume ,
 - sinon, il reste éteint.

S'il n'est pas allumé , on passe au bloc suivant de l'étape n .

- Lorsque tous les blocs de l'étape n sont passés, on refait les mêmes étapes pour les blocs de $n + 1$, et ainsi de suite jusqu'à la résolution désirée.

Notons que le premier bloc (*i.e.* l'écran complet) est considéré allumé .

Bien entendu, il est aussi possible de trouver la carte dynamique dans ce cas. Cependant, ce seront les blocs (de différentes grosseurs) qui seront de la même couleur (ce sont de gros pixels). Notons qu'il y a plusieurs paramètres ajustables afin d'optimiser la recherche de J_R et le lecteur peut se référer à R. Côté pour plus de détails [voir le manuel technique].

Notons finalement que cette méthode possède certains avantages et inconvénients. Premièrement, il faut au moins deux bassins d'attraction, de sorte qu'on ne peut l'utiliser pour des dendrites ou des poussières de Fatou. En second lieu, il peut y avoir des parties de J_R oubliées dans un bloc non-allumé , si J_R et le bloc sont tels que les quatre coins appartiennent au même bassin mais que J_R y passe quand même. Malgré ces deux inconvénients, l'avantage principal est que J_R est construit jusqu'à la résolution désirée, en plus de la carte dynamique couleur (si on la désire). Finalement, notons que cette méthode permet de faire un zoom de toutes les régions voulues, puisqu'il n'y a qu'à spécifier les limites du cadre dans lequel on veut chercher. La plupart des figures de ce travail ont été réalisées avec la MLFM.

5.3.2 Ensemble de Mandelbrot

Pour les ensembles de type Mandelbrot, on utilise l'itération directe. Par exemple, pour le modèle en diamant (voir §5.2.2), on a :

$$\begin{aligned}M &= \mathbb{C} \setminus A_1 \cup A_2 \\A_1 &= \{c \in \mathbb{C} : R^n(0) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty\} \\A_2 &= \{c \in \mathbb{C} : R^n(0) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}\end{aligned}$$

On prend donc un point c de \mathbb{C} que l'on identifie avec le centre d'un pixel. On itère ce point de façon directe. On choisit deux couleurs, disons rouge pour A_1 et vert pour A_2 , et n_{max} et ϵ . Alors, il y a les trois possibilités suivantes :

1. Si $|R^k(0) - 1| < \epsilon$ pour $k \leq n_{max}$, alors $c \in A_1$.

On donne à ce pixel un ton de rouge correspondant à k .

2. Si $|R^k(0) - \infty| < \epsilon$ pour $k \leq n_{max}$, alors $c \in A_2$.

On donne à ce pixel un ton de vert correspondant à k . Notons que l'infini peut être 10^5 par exemple.

3. Si 1. et 2. ne sont pas satisfaites, *i.e.* $k > n_{max}$ et le rayon de convergence ϵ n'a pas été atteint, alors $c \in M$ et on laisse le pixel noir.

On fait ces étapes pour tous les pixels de notre image et l'on obtient les ensembles désirés.

Maintenant que l'on a donné la théorie de l'itération des fonctions rationnelles sur $\overline{\mathbb{C}}$ et les méthodes pour produire nos ensembles de Julia, de Fatou, et de type Mandelbrot, on peut regrouper tous les éléments de la physique statistique, du groupe de renormalisation et des modèles hiérarchiques, via la théorie de l'itération des fonctions rationnelles. Voyons cette synthèse finale.

Chapitre 6

Synthèse et résultats

Dans ce chapitre, nous allons faire le lien formel entre tous les éléments théoriques décrits plus tôt : physique statistique, groupe de renormalisation et géométrie fractale. De plus, on énumérera la liste des informations contenues dans les différents ensembles associés aux TGR (J_R, F_R, M). Finalement, on donnera une série de résultats obtenus pour divers modèles hiérarchiques.

6.1 Lien formel

Le groupe de renormalisation nous permet d'écrire (voir §3.2.2)

$$Z[\mathbf{K}'] = Z[\mathbf{K}] \quad (6.1)$$

avec

$$\mathbf{K}' = R_\lambda(\mathbf{K}) \quad \text{et} \quad N' < N \quad (6.2)$$

D'autre part, on sait que les transitions de phase sont expliquées par la théorie de Yang-Lee (§2.2) qui relie l'apparition des transitions de phase à la distribution des zéros de la fonction de partition à la limite thermodynamique.

Or, d'après (6.1), lorsque l'on connaît les zéros d'un système de N' particules, on peut aussi trouver ceux du système avec N particules (avec $N' < N$), en itérant (6.2) en sens inverse. Ainsi, pour un système fini de N' particules dont on connaîtrait les zéros, on pourrait retrouver les zéros de la fonction de partition à la limite thermodynamique en itérant (6.2) en sens inverse un nombre infini de fois :

$$\{y_{lim}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} R^{-n}(\{y_0\}) \quad (6.3)$$

où $\{y_0\}$ est l'ensemble des zéros du système de N' particules, *i.e.* $Z[y_0] = 0$, de sorte que $\{y_{lim}\}$ nous donne bien la distribution recherchée.

Cependant, comme on l'a vu en §3.3, R_λ est généralement connue de façon approximée, de sorte que (6.3) n'est pas réalisable. Bien entendu, cette situation se retrouve dans la plupart des réseaux de Bravais. En revanche, on connaît R_λ exactement pour les modèles hiérarchiques. De plus, R_λ est alors une fonction rationnelle : on peut donc utiliser tout l'outillage mathématique du chapitre 5 pour calculer les zéros à la limite thermodynamique (par itération inverse).

Nous allons maintenant montrer que l'ensemble de Julia associé à une transformation de renormalisation rationnelle n'est rien d'autre que la distribution des zéros de la fonction de partition à la limite thermodynamique.

Pour mieux illustrer cette équivalence, nous allons considérer un exemple particulier : le réseau en diamant. Remarquons cependant que la discussion reste générale et que les conclusions s'appliqueront à tous les modèles pour lesquels la TGR est rationnelle. Considérons donc un réseau en diamant, tel qu'illustré à la figure 4.1, sur lequel on étudie le modèle de Potts en l'absence de champ magnétique extérieur. Le hamiltonien est :

$$\mathcal{H} = -K \sum_{\langle ij \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \quad (6.4)$$

où $\sigma_i = 1, \dots, q$. Posant $z = e^{\beta K}$, on peut écrire en se basant sur (4.9) :

$$Z_n(z) = Z_{n-1}(z') [A(z)]^{2 \cdot 4^{n-1}} \quad (6.5)$$

avec [voir (4.50)]

$$A(z) = 2z + q - 2 \quad \text{et} \quad z' = R(z) = \left(\frac{z^2 + q - 1}{2z + q - 2} \right)^2 \quad (6.6)$$

Si l'on connaît les zéros à une étape donnée, on peut calculer tous les zéros à toutes les étapes, et ce de manière exacte.

En particulier, pour l'étape de départ (où il n'y a que deux sites de surface), on a :

$$Z_1(z) = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp\{-\mathcal{H}/k_B T\} = \sum_{\sigma_1, \sigma_2=1}^q \exp\{\beta K \delta(\sigma_1, \sigma_2)\} = \sum_{\sigma_1, \sigma_2=1}^q z^{\delta(\sigma_1, \sigma_2)}$$

avec

$$z^{\delta(\sigma_1, \sigma_2)} = \begin{cases} 1 & , \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \\ z & , \quad \sigma_1 = \sigma_2 \end{cases}$$

D'où ,

$$Z_1(z) = \sum_{\sigma_1=1}^q z + \sum_{\sigma_1}^q \sum_{\sigma_2 \neq \sigma_1}^q 1 = qz + q(q-1) = q(z+q-1) \quad (6.7)$$

Donc, il n'y a qu'un seul zéro (pour $q \neq 0$) situé à :

$$z = 1 - q \quad (6.8)$$

On peut alors retrouver les zéros de $Z_n(z)$ en itérant (6.8) en sens inverse $n-1$ fois.

Relions maintenant la structure de la distribution des zéros à la géométrie fractale. Pour le réseau en diamant, le réseau fini construit après n étapes contient $B^{n-1} = 4^{n-1}$ liens, de sorte que $Z_n(z)$ est un polynôme en z de degré 4^{n-1} ; le terme de degré le plus élevé est $qz^{4^{n-1}}$. On peut donc écrire :

$$Z_n(z) = q \prod_{i=1}^{4^{n-1}} (z - x_i) \quad (6.9)$$

où les x_i sont les zéros de $Z_n(z)$. Si l'on dénote par \tilde{x}_i , avec $1 \leq i \leq 4^{n-2}$ les zéros de $Z_{n-1}(z)$, les équations (6.5) et (6.6) conduisent à la relation suivante entre les x_i et les \tilde{x}_i [Derrida, De Seze et Itzykson ; 1983] :

$$q \prod_{i=1}^{4^{n-1}} (z - x_i) = q \left\{ \prod_{i=1}^{4^{n-2}} \left[\left(\frac{z^2 + q - 1}{2z + q - 2} \right)^2 - \tilde{x}_i \right] \right\} (2z + q - 2)^{2 \cdot 4^{n-2}} \quad (6.10)$$

que l'on peut réécrire comme :

$$\prod_{i=1}^{4^{n-1}} (z - x_i) = \prod_{i=1}^{4^{n-2}} \left[(z^2 + q - 1)^2 - \tilde{x}_i (2z + q - 2)^2 \right] \quad (6.11)$$

Regardons l'un des facteurs du côté droit de l'équation (6.11) :

$$P(z) = (z^2 + q - 1)^2 - \tilde{x}_i (2z + q - 2)^2 \quad (6.12)$$

$P(z)$ est un polynôme de degré 4 dont les quatre racines sont les quatre préimages de \tilde{x}_i par $R(z)$. Ceci vient de l'équivalence :

$$P(z) = 0 \iff R(z) = \tilde{x}_i \quad (6.13)$$

Ceci, en plus de (6.11), prouve que si l'on connaît les 4^{n-2} zéros \tilde{x}_i de $Z_{n-1}(z)$, alors on connaît aussi les 4^{n-1} zéros x_i de $Z_n(z)$. Donc, les x_i ne sont rien d'autre que les préimages des \tilde{x}_i par la TGR $R(z)$. Ainsi, puisque l'on connaît $Z_1(z)$ (qui possède un zéro à $\tilde{x}_1 = 1 - q$), on connaît tous les zéros de tous les $Z_n(z)$: les zéros de $Z_n(z)$ ne

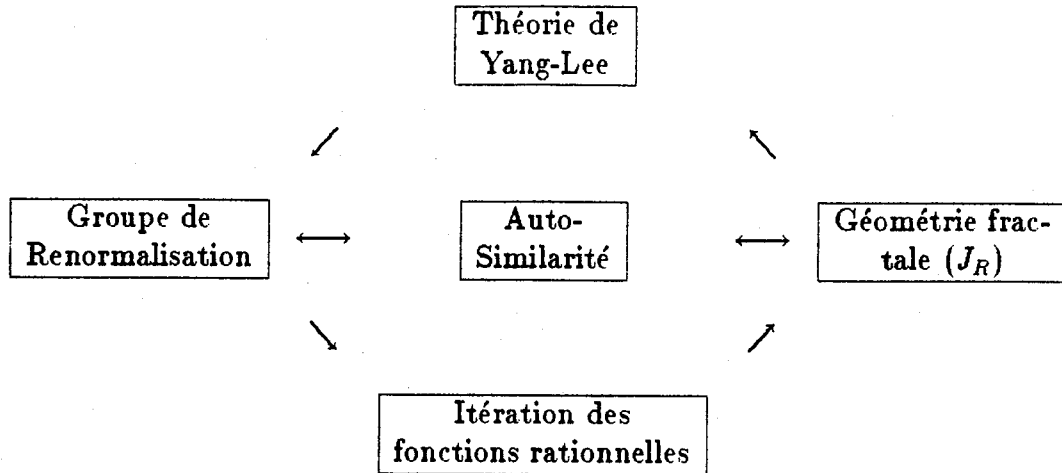


Figure 6.1: Liens entre les différentes théories étudiées.

sont que les 4^{n-1} préimages de $1 - q$ par la $(n - 1)^{i\text{ème}}$ itération de $R(z)$. A la limite thermodynamique, l'ensemble des préimages est exactement l'ensemble de Julia de la transformation R (voir les définitions en §5.2.1). *Nous venons donc de montrer que les zéros de la fonction de partition $Z_n(z)$ à la limite thermodynamique forment l'ensemble de Julia.*

Notons que ce résultat est valide pour toutes les TGR rationnelles. En effet, pour d'autres modèles hiérarchiques, on peut écrire [voir (4.9)] :

$$Z_n(\sigma) = \sum_{\tau} Y_n(\sigma; \tau) \prod_{\alpha=1}^B Z_{n-1}(\tau^\alpha) \quad (6.14)$$

de sorte que les préimages des zéros de Z_n sont aussi les zéros de Z_{n-1} , eux-mêmes les préimages de Z_{n-2} , et ainsi de suite jusqu'à Z_1 dont l'on peut calculer les zéros.

Pour bien montrer que les zéros de Z_n forment l'ensemble de Julia, il suffit de se reporter à la section §5.3.1 A. qui traite de la méthode par itération inverse. Puisque J_R est la fermeture des points périodiques répulsifs, l'itération inverse d'un point quelconque (sauf si c'est un point fixe) nous donne l'ensemble de Julia, lorsque l'on itère assez longtemps. Or, comme on peut le vérifier pour l'exemple du réseau en diamant, le point de départ, *i.e.* le zéro de Z_1 , n'est pas un point fixe de R (qui sont $1, \infty$) : on en conclut donc que les préimages z_n de $z_1 = 1 - q$ forment l'ensemble de Julia, pour $n \rightarrow \infty$:

$$J_R = \{z_n | z_n = R^{-n}(z_1) \text{ pour } n \rightarrow \infty\}$$

Donc, de façon générale, on a :

$$J_R = \{z_n\}$$

où z_n : zéros de Z_n à la
limite thermodynamique, (6.15)

pour $R_\lambda =$ carte rationnelle.

On a donc établi les liens illustrés à la figure 6.1.

Puisque J_R peut être produit par itération inverse de n'importe quel point (sauf quelques points spéciaux), on n'a donc plus besoin de calculer les zéros de départ de Z_1 . De plus, le calcul des zéros à la limite thermodynamique se réduit à trouver J_R , de sorte que le seul objet mathématique qu'il nous faille connaître dorénavant est R_λ : le comportement critique du système ne dépendra que de la forme de J_R .

6.2 Information contenue dans les différents ensembles

Dans cette section, nous allons montrer toute la richesse d'information contenue dans les ensembles, pour un réseau donné. Chacun des types de production des ensembles fournit des éléments différents de sorte que nous allons les examiner un à un.

6.2.1 Ensembles de Julia

Comme on l'a démontré en §6.1, J_R représente la distribution des zéros de la fonction de partition pour des modèles dont la TGR est une fonction rationnelle R_λ . Or, on peut être intéressé à plusieurs aspects de cette distribution : la fonction de distribution des zéros $g(z)$ (ou si l'on veut la densité des zéros)[voir §2.2 et §2.3], les points d'accumulation près de l'axe réel, ou encore l'approche des zéros vers ces points d'accumulation. Les différents types de production de J_R rendent possibles l'optimisation de la recherche de ces différents éléments.

A. Densité des zéros : $g(z)$

Comme on l'a vu en §2.3, on peut être intéressé à connaître la densité des zéros à la limite thermodynamique. Or, la méthode par itération inverse non-biaisée (MII) nous

donne justement cette densité des zéros (voir §5.3.1 A). En effet, lorsque l'on utilise une méthode de Monte-Carlo, *i.e.* que l'on choisit l'une des d préimages au hasard afin de calculer les suivantes (après avoir affiché ces d points auparavant), chacune des préimages a une probabilité égale d'être choisie, de sorte qu'aucune région de J_R n'est privilégiée par la méthode de production : les régions possédant le plus de points sont simplement celles où la densité des zéros est la plus grande. On peut donc connaître la densité des zéros de façon numérique simplement en comptant leur nombre par unité de surface, dans une région donnée. Cette évaluation numérique nous donne alors une bonne idée de $g(z)$.

Notons que seule la MII peut rendre cette étude possible, car dans toutes les autres méthodes (MIIM, MLF ou MLFM), les probabilités sont biaisées.

B. Comportement critique

Nous allons ici faire le lien entre la théorie des chapitres 3,4 et 5. On sait que l'on peut calculer les exposants critiques et la température critique à partir de la connaissance d'un point fixe [§3.2.2 et §3.2.3] *i.e.*

$$R_\lambda(\mathbf{K}^*) = \mathbf{K}^* \quad (6.16)$$

D'autre part, nous sommes intéressés aux champs d'échelle essentiels [voir (3.92)], *i.e.*

$$u_i^{(n)} = \lambda_i^n u_i \quad (6.17)$$

avec $\lambda_i > 1$. Or, dans le cas des modèles hiérarchiques étudiés ici (sans champ magnétique externe), il ne peut y avoir qu'un seul champ d'échelle, car $K' = R_\lambda(K)$ est une fonction de K seulement : \mathbf{K} et \mathbf{K}' ne contiennent qu'une seule composante chacun. Alors, (3.44), (3.45), (3.46) impliquent :

$$T_{\alpha\beta} \equiv \left. \frac{\partial K'_\alpha}{\partial K_\beta} \right|_{\mathbf{K}^*} \quad \Rightarrow \quad T = \left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K^*}$$

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \phi_\alpha^{(i)} T_{\alpha\beta} = \lambda_i \phi_\beta^{(i)} &\Rightarrow \phi T = \lambda \phi \\ &\Rightarrow \lambda = T \\ &\Rightarrow \phi = 1 \end{aligned}$$

$$u_i = \sum_\alpha \phi_\alpha^{(i)} \delta K_\alpha \quad \Rightarrow \quad u = \phi \delta K = \delta K$$

Donc, pour nos modèles en champ nul, on aura simplement :

$$u = \delta K = K - K^*$$

$$u^{(n)} = \lambda^n u$$

de sorte que le champ essentiel ($\lambda_i > 1$) correspond simplement à un point fixe répulsif [voir §5.1.3]. En effet, on avait alors ;

$$\lambda \equiv (R^n)'|_{z=z_0}$$

où z_0 est un point périodique de période n . Or, ici, on a un point fixe $z = K^*$ ($n = 1$), de sorte que l'on retrouve bien

$$|\lambda| = R'(K)|_{K^*} > 1$$

Nous sommes donc intéressés à l'étude des points fixes répulsifs. Or, l'ensemble de Julia est précisément la fermeture des points périodiques répulsifs, *i.e.* des points fixes répulsifs \bar{z} et de leur orbite inverse $O^-(\bar{z})$.

Donc, les points d'accumulation de J_R sur l'axe réel, en plus de nous donner la température à laquelle se trouve une transition de phase, nous identifient les points périodiques répulsifs. On peut alors sélectionner ceux qui correspondent à des points fixes répulsifs et calculer les exposants critiques correspondants. Si l'on se reporte à (3.58), on peut calculer les exposants critiques connaissant p et q , *i.e.* les valeurs propres λ_K et λ_H . Or, dans notre cas, on ne peut que calculer $\lambda_K = \lambda$, car $H = 0$ (champ nul). Ceci implique que nous ne pouvons calculer que les deux exposants critiques ν et α . D'après les résultats du chapitre 3, on a :

$$\nu = \frac{2 - \alpha}{d} = \frac{\ln L}{\ln \lambda_K} \quad (6.18)$$

où

d : dimension
 L : variation linéaire d'échelle
 due à la TGR.

Ces résultats sont valides pour les réseaux de Bravais. Pour faire le lien avec les réseaux hiérarchiques, il suffit de se rappeler [voir §4.1.2] que :

$B = b^d$, B : nombre d'aggrégation
 b : facteur d'échelle
 d : dimension.

Faisant correspondre b à L , on trouve :

$$\nu = \frac{2 - \alpha}{d} = \frac{1 \ln B}{d \ln \lambda_K} \quad (6.19)$$

Notons que l'on arrive au même résultat en considérant le volume des réseaux hiérarchiques. En effet, pour les réseaux de Bravais,

$$L^d = N/N' = V/V'$$

avec $N' < N$, $V' < V$, où N est le nombre de particules et V le volume qu'elles occupent. Or, pour un modèle hiérarchique, le volume est proportionnel au nombre de liens, *i.e.* à B . Donc, à une étape n et à l'étape subséquente $n - 1$ (décimation : $N' < N$), on aura : $V/V' = B^n/B^{n-1} = B$, de sorte que l'on retrouve bien

$$L^d = B = b^d \quad (6.20)$$

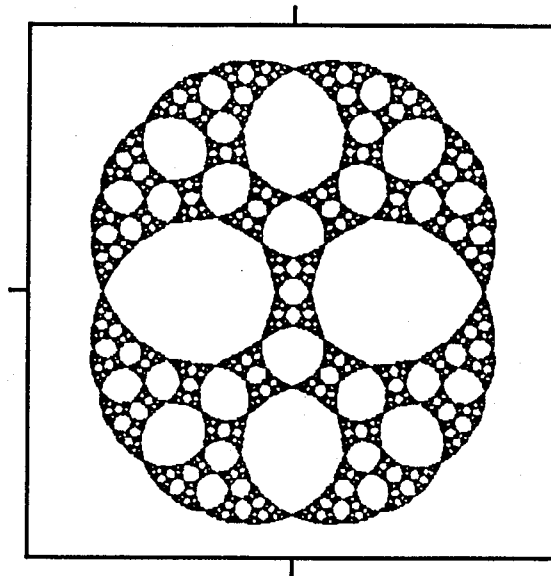
Il nous est maintenant facile de calculer les exposants critiques. Voici la procédure :

1. On identifie les points de J_R s'accumulant sur l'axe réel : d'après la théorie de Yang-Lee, ils indiquent les points physiques critiques ¹.
2. De ces points de J_R (donc périodiques répulsifs), on identifie ceux qui sont des points fixes répulsifs.
3. Ayant trouvé la valeur des z^* , on peut calculer λ_K et donc les exposants critiques reliés à ces z^* ; B et d sont connus pour un modèle donné .

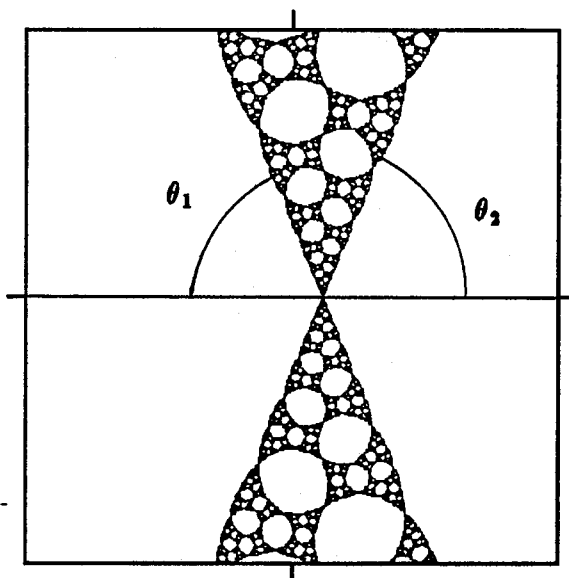
Afin de mieux visualiser ces calculs, examinons encore une fois le réseau hiérarchique en diamant correspondant au modèle d'Ising ($q = 2$). La figure 6.2 illustre J_R pour ce modèle. Notons que ces figures ont été obtenues suivant la méthode par itération directe modifiée (MLFM) de sorte que le support est très bien défini : dans ce cas, la MLFM est supérieure à la MIIM, car elle permet de bien identifier les points d'accumulation de J_R en faisant des zooms. Donc, en faisant des zooms dans les régions où J_R traverse l'axe réel positif, on identifie les points critiques physiques suivants :

$$z_c = \begin{cases} 0,2956 \\ 3,3830 \end{cases}$$

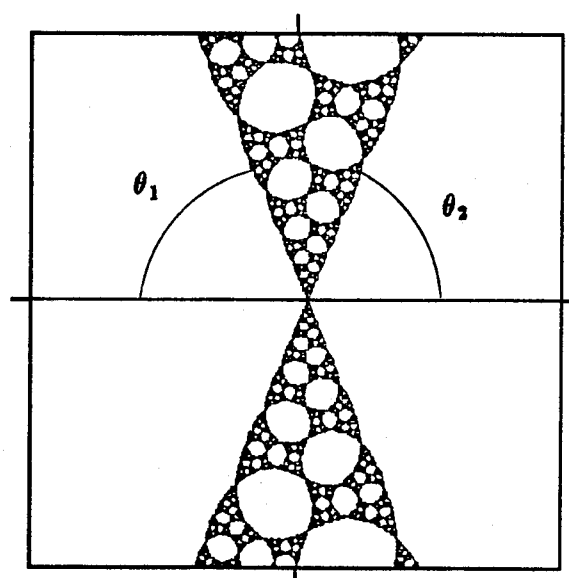
¹Notons que l'on ne peut avoir de transition du premier ordre, car la méthode du groupe de renormalisation repose sur l'hypothèse que $\xi \rightarrow \infty$, ce qui implique des transitions du deuxième ordre ou d'ordre plus élevé . C'est la raison pour laquelle on parle de points critiques physiques et non de points de transitions de phase. De plus, il faut faire attention à ne pas confondre ces points critiques physiques aux points critiques définis au sens mathématique en §5.2.2.



(a) J_R pour $q = 2$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$



(b) $0,295590 \leq \Re(z) \leq 0,295604$
 $-0,000007 \leq \Im(z) \leq 0,000007$



(c) $3,38300 \leq \Re(z) \leq 3,38304$
 $-0,00002 \leq \Im(z) \leq 0,00002$

Figure 6.2: Ensemble de Julia pour le modèle sur réseau en diamant : (a) l'ensemble au complet ; (b) zoom du point de Néel ; (c) zoom du point de Curie.

Notons que seuls les z^* réels positifs ont une signification physique du fait que :

$$z = e^{K/k_B T} \quad , \quad \text{avec } K, T \in \mathfrak{R} \\ \text{et } T \geq 0$$

Or, pour $0 < \Re(z) < 1$, on doit avoir $K < 0$, et pour $\Re(z) > 1$, $K > 0$, de sorte que nos deux points critiques correspondent à des modèles anti-ferromagnétiques (point de Néel) et ferromagnétiques (point de Curie):

$$z_c = \begin{cases} 0,2956 & , \text{ point de Néel} \\ 3,3830 & , \text{ point de Curie} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que nos z_c sont bien des points fixes à partir de R :

$$R(z_c) = \left(\frac{z_c^2 + q - 1}{2z_c + q - 2} \right)^2 = z_c \quad , \quad \text{pour } q = 2$$

Ainsi on a bien $z_c = z^*$. Le calcul des exposants α et ν est alors direct : il suffit d'évaluer $R'(z)$ en z^* . Donc ;

$$\begin{aligned} R'(z) &= 4 \frac{(z^2 + q - 1)}{(2z + q - 2)^3} \{ z^2 + (q - 2)z - (q - 1) \} \\ &= 4 \frac{(z^2 + 1)}{(2z)^3} \{ z^2 - 1 \} \quad , \quad \text{pour } q = 2 \\ &= \frac{(z^4 - 1)}{2z^3} \end{aligned}$$

d'où ;

$$\lambda_K = R'(z)|_{z^*} = \begin{cases} -19,2106 & , \text{ pour le point de Néel} \\ 1,6786 & , \text{ pour le point de Curie} \end{cases}$$

Puisque pour le réseau en diamant $B = 4$ et que l'on considère que le facteur d'échelle est $b = 2$ (de manière à avoir $d = 2$), on peut calculer les deux exposants critiques α et ν . En résumé, on obtient les résultats du tableau 6.1. Il est à noter que l'on a utilisé $|\lambda_K|$ au lieu de λ_K dans les calculs. Ceci vient du fait que le point de Néel n'est pas un point fixe (comme on le verra plus loin) et l'équation (6.19) n'y est donc pas valide. Finalement, notons que lorsque la valeur de la constante de couplage est connue, on peut facilement déterminer la température critique T_c :

$$T_c = \frac{K}{k_B \ln z^*}$$

Comme on vient de le voir, la détermination des propriétés critiques est très simple une fois connue la dynamique de la TGR rationnelle. *En fait, le problème de physique statistique initial s'est transformé en un problème de dynamique complexe.*

type	z^*	λ_K	α	ν
Néel	0,2956	-19,2106	1,5309	0,2345
Curie	3,3830	1,6786	-0,6765	1,3383

Tableau 6.1: Valeurs critiques pour le modèle d'Ising ($q = 2$) sur un réseau en diamant ($B = 4, b = d = 2$).

C. Amplitude de l'énergie libre

Certains auteurs [Derrida, Itzykson et Luck ; 1984] ont relié les oscillations dans l'amplitude critique de l'énergie libre f à l'angle d'approche de J_R à l'axe réel (dans le cas du modèle d'Ising sur le réseau en diamant). Ils ont montré que la partie singulière de l'énergie libre est donnée par :

$$f_{sing}(z) = z^a \sum_{-\infty < p < +\infty} A_p e^{ip\omega \ln z} \quad (6.21)$$

avec A_p : amplitude oscillante
(coefficients de Fourier)

$$\text{où } a \equiv \frac{\ln 4}{\ln \lambda_K} \quad \text{et} \quad \omega \equiv \frac{2\pi}{\ln \lambda_K}$$

Or, il est possible de relier A_p à l'angle θ de la figure 6.2. En effet, f est analytique sauf pour les points de J_R , de sorte que θ représente l'angle d'analyticité de f ². On peut alors écrire :

$$A_p \sim \exp(-\omega\theta|p|) \quad (6.22)$$

Ainsi, on voit bien que l'approche des zéros à l'axe réel peut fournir de l'information sur le comportement critique du système. Encore une fois, le lecteur désireux d'en connaître davantage à ce sujet peut se référer à l'article de [Derrida, Itzykson et Luck ; 1984].

Ce sont là les principales informations que l'on peut soutirer de l'ensemble de Julia. Bien entendu, il y a toute la question de l'interprétation de la dimension fractale associée

²Notons que les différents angles des deux points fixes sont égaux entre eux, i.e. que $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta'_1 = \theta'_2$. Ceci vient du fait que la carte $R(z)$ projette z et $1/z$ au même point [voir la référence citée au début de cette sous-section]. De plus J_R est symétrique par rapport à l'axe réel de sorte que les angles au-dessus et au-dessous de cet axe sont nécessairement égaux.

à J_R qui est susceptible de donner de l'information supplémentaire, mais nous n'avons pas abordé ce vaste sujet dans ce travail. Voyons maintenant ce que l'ensemble de Fatou peut nous révéler.

6.2.2 Ensemble de Fatou

L'étude de l'ensemble de Fatou (F_R) nous renseigne sur la dynamique des bassins d'attraction des différents points fixes attractifs de la carte $R(z)$: seules les méthodes MLF et MLFM permettent cette étude.

Afin de bien illustrer toute l'information contenue dans la carte dynamique des bassins de F_R , nous allons encore une fois prendre l'exemple du modèle d'Ising sur réseau en diamant. La figure 6.3 illustre la dynamique de F_R : on y remarque la présence de deux attracteurs (1 et ∞). De plus, J_R y est aussi visible : c'est la frontière entre les différents bassins. Notons que les "pétales" proviennent (en grande partie) du bruit numérique.

Avant de discuter l'aspect physique que contient F_R , la figure 6.3 nous permet de bien visualiser plusieurs concepts définis au chapitre 5. En premier lieu, on remarque qu'il n'y a que deux attracteurs : ∞ (rouge) et 1 (vert). Notons que ces deux points sont des points fixes superattractifs. Il est facile de voir quels sont les différents bassins d'attraction : $A(1)$ est l'ensemble des bassins verts et $A(\infty)$ est l'ensemble des bassins rouges. On vérifie aisément que J_R est la frontière $\partial A(1) = \partial A(\infty) = J_R$. De plus, $A^*(1)$ est la constituante de $A(1)$ contenant 1, *i.e.* la grande "tache" verte à la droite du centre de l'image, alors que $A^*(\infty)$ constitue le pourtour extérieur de la figure.

Comme on l'a mentionné en §5.3.1, les différentes couleurs représentent l'entier k tel que $R^k(z)$ ait atteint le disque de convergence de rayon ϵ de l'attracteur en question. Donc, le ton nous renseigne sur la *vitesse* à laquelle on atteint le point fixe attractif. On remarque que plus les points sont près de J_R , plus k est grand et donc que les points tendent plus lentement vers l'attracteur, ce qui est intuitivement évident.

Regardons maintenant la physique que contient F_R . Comme on l'a mentionné ,

$$z = e^{J/k_B T} \quad , \quad \text{avec } J, T \in \mathbb{R} \\ \text{et } T > 0$$

représente les seules possibilités physiques. Ainsi, d'après la valeur de J et T on a des systèmes différents. Pour des températures extrêmes, on retrouve les possibilités suivantes :

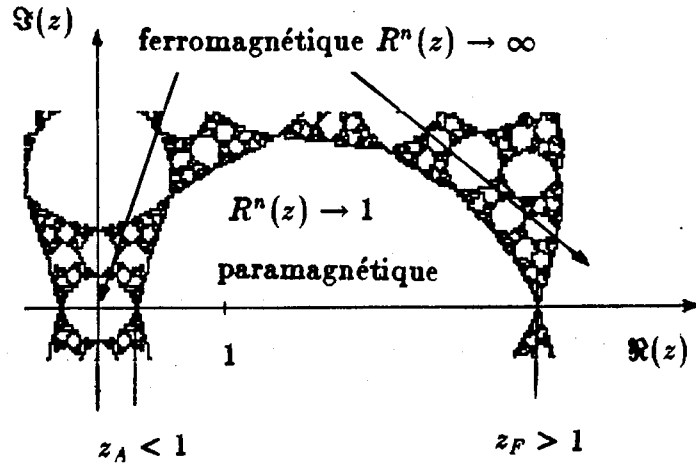


Figure 6.4: La physique sur l'axe réel : il y a deux phases et deux points critiques. Ils correspondent l'un à l'autre par $z_F = 1/z_A$.

Comme le montre la figure 6.3, le modèle d'Ising sur réseau en diamant ne peut avoir que deux phases possibles : ferromagnétique ($z \rightarrow \infty$) et paramagnétique ($z = 1$). La figure 6.4 résume le contenu physique de F_R .

Afin d'interpréter cette figure, nous allons suivre l'axe réel positif. Notons que la valeur d'un z quelconque nous renseigne sur notre réseau à la limite thermodynamique alors que $R^n(z)$ pour $n \rightarrow \infty$ nous donne l'information sur le comportement du système à une étape finie, *i.e.* que notre réseau est un réseau fini (voir §3.2). Cette nuance s'avère très importante dans l'interprétation des résultats que nous allons faire.

De plus, on doit toujours avoir à l'esprit que la TGR agit sur $z = e^{J/k_B T}$, *i.e.* que c'est z qui est renormalisé et non la constante de couplage seule ou encore la température seule : on a donc une certaine liberté dans l'interprétation des résultats. Cela implique aussi que J et T peuvent être renormalisées en même temps : ainsi J pourrait changer de signe en cours de renormalisation. Avant d'examiner chacune des régions de l'axe réel positif, il faut noter que pour ce modèle d'Ising sur réseau en diamant, la TGR est :

$$R(z) = \left(\frac{z^2 + q - 1}{2z + q - 2} \right)^2$$

de sorte que $R(1/z) = R(z)$ (pour $q = 2$), *i.e.* que pour $0 \leq z < 1$, on obtient le même comportement que pour $z > 1$: il y a donc correspondance entre les régions anti- et ferromagnétiques.

1. $z < 1$:

Cette région est conjuguée à la région ferromagnétique. Ainsi, seul le comportement pour $z \geq 1$ sera décrit ici, puisque la région "anti-ferromagnétique" ($z < 1$) aura nécessairement le même comportement.

2. $z = 1$:

Comme on l'a déjà mentionné, ce point correspond à $T \rightarrow \infty$ et donc à un réseau de départ parfaitement paramagnétique ; le bruit thermique empêche tout alignement des spins.

Physiquement, il est facilement concevable de s'attendre à ce que le système infini demeure paramagnétique, car $T \rightarrow \infty$ ne devrait pas être modifié par le processus d'itération du groupe de renormalisation. De fait, $z = 1$ est un point fixe superattractif, de sorte que $R^n(1) = 1 \forall n$ et $R'(1) = 0$: un système avec $T \rightarrow \infty$ demeure à $T \rightarrow \infty$ quel que soit l'étape n de construction du réseau.

3. $z > 1$:

Cette région correspond à des réseaux de départ ferromagnétiques, *i.e.* avec un hamiltonien dont la constante de couplage est positive ($J > 0$).

• $1 < z < z_F$:

Ici, z est près de 1 de sorte que le bruit thermique est relativement important ; même si le réseau de départ était ferromagnétique, ce bruit pourrait causer le désalignement des spins.

Cette importance du bruit thermique se trouve confirmée par la dynamique de F_R ; le système est paramagnétique.

• $z = z_F$:

C'est un point fixe répulsif et un point d'accumulation, de sorte qu'il indique une transition de phase. Ce point étant un point ferromagnétique ($z_F > 1$), il correspond bien à un point de Curie, puisque la transition a lieu entre systèmes paramagnétique et ferromagnétique. Ceci est facile à visualiser sur la figure 6.3 ; z_F sépare les deux bassins rouge et vert.

• $z > z_F$:

Nos réseaux de départ et nos systèmes renormalisés sont ferromagnétiques : c'est un peu normal, plus z grandit (et $z > 1$), plus T diminue et moins le bruit thermique devient important.

Comme on l'a dit précédemment, les régions anti-ferromagnétique et ferromagnétique sont conjuguées entre elles. Ainsi, les points $1/z$ et z ont le même comportement. Ceci se vérifie aisément :

$$\text{ferromagnétique} \quad : \quad 0 \leq z < z_A \iff z > z_F$$

$$\text{transition de phase} \quad : \quad z_A = 1/z_F \iff z_F = 1/z_A$$

$$\text{paramagnétique} \quad : \quad z_A < z < 1 \iff 1 < z < z_F$$

et on peut le visualiser facilement sur les figures 6.3 et 6.4. Donc, le "point de Néel" z_A n'est que l'inverse du point de Curie z_F .

Avant de terminer cette sous-section, il faut mentionner que la dynamique de F_R peut être reliée au flot de renormalisation introduit en §3.2.3. Considérons encore une fois la figure 6.3. Comme on l'a déjà dit, le ton d'une couleur correspond à la vitesse d'approche du point itéré vers l'attracteur. Maintenant, nous n'allons considérer que l'axe réel positif. Soit k le ton de la couleur correspondant à $R^k(z) \rightarrow 1$ ou ∞ (selon l'attracteur). A partir de la figure 6.3, on peut tracer la figure 6.5(a). Or, cette dernière peut être reliée au flot de renormalisation de la façon suivante. D'abord, on se rappelle que

$$z = e^K, \text{ avec } K \equiv J/k_B T$$

D'autre part, on sait que le flot de renormalisation est défini pour les champs d'échelle. Or, ici il n'y en a qu'un seul :

$$u = \delta K = K - K^*$$

défini en chaque point fixe. Il nous faut donc voir comment évolue K . La figure 6.5(b) fait le lien entre 6.5(a) et 6.5(c) ; plus k est petit, plus vite le K correspondant se dirige vers son attracteur. Ce comportement est également visible sur 6.5(c) qui représente le flot de renormalisation correspondant. Il est à noter que le flot est unidimensionnel du fait qu'il n'y a qu'un seul champ d'échelle (une seule constante de couplage). De plus, on y voit très bien que $K = 0$ et $K \rightarrow +\infty$ sont des points fixes attractifs (qui correspondent à $z = 1, +\infty$ respectivement : les champs d'échelle correspondant sont inessentiels), alors que $K = +1,219$ est un point fixe répulsif pour lequel le champ d'échelle est essentiel : ce point correspond à z_F . Encore une fois, seule la partie de $z \geq 1$ a été traitée, du fait de la conjugaison entre les deux régions.

Maintenant que l'on a vu l'information contenue dans F_R , il nous reste l'espace des paramètres à explorer, *i.e.* les ensembles de type Mandelbrot.

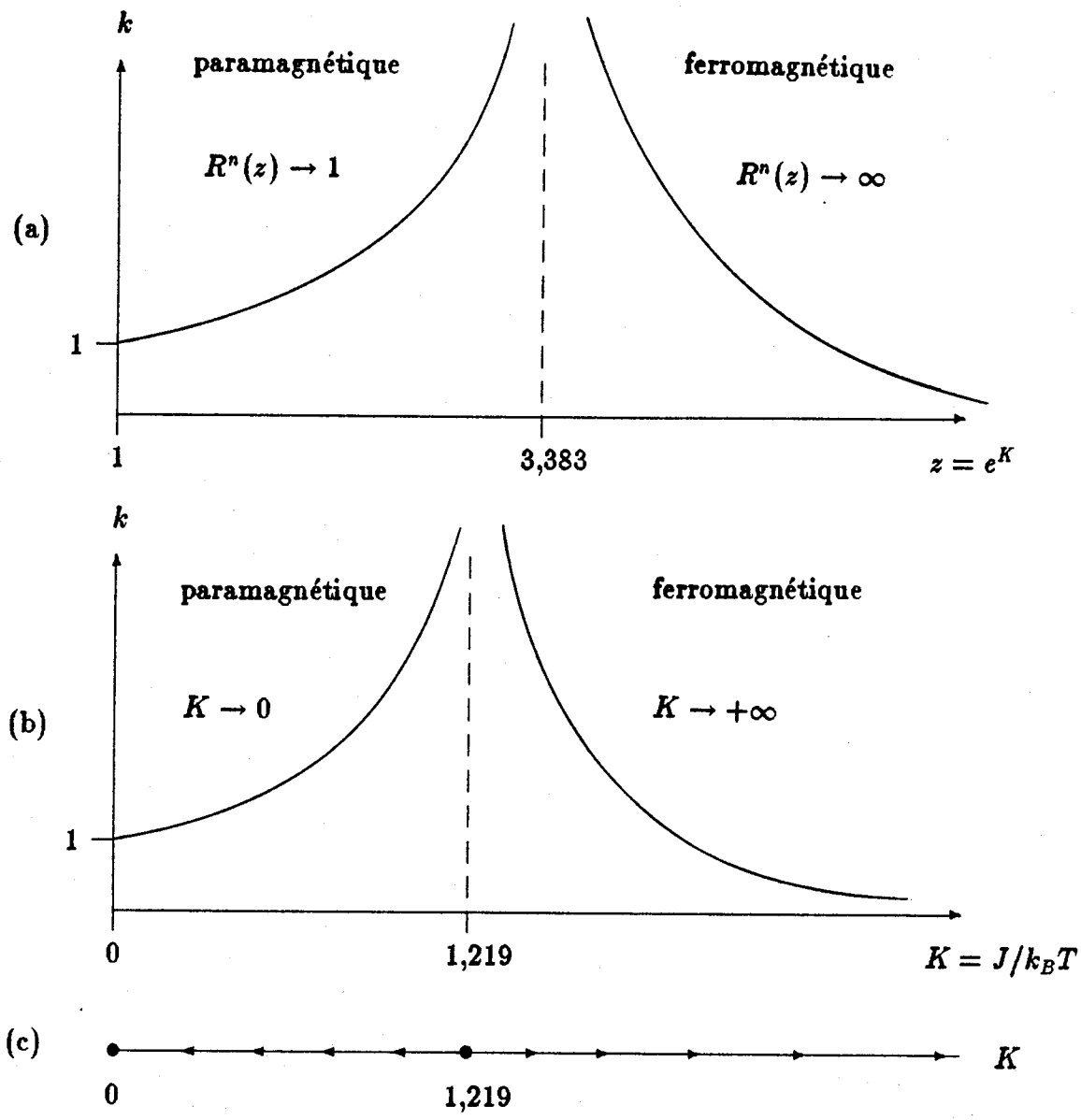


Figure 6.5: Flot de renormalisation : (a) $z \in \mathfrak{R}$ tiré de F_R ; (b) $K \in \mathfrak{R}$ correspond ; (c) flot de renormalisation.

6.2.3 Ensembles de type Mandelbrot

La définition de l'ensemble de Mandelbrot original [voir §5.2.2] est telle que l'on peut savoir si l'ensemble de Julia correspondant à la valeur du paramètre c sera ou non connexe. Or, seuls les ensembles de Julia connexes sont susceptibles de séparer des bassins d'attraction et donc de décrire des transitions de phase. Cependant, les théorèmes sur lesquels s'appuient la production de M ne sont valides que pour les TGR polynômiales : pour les cartes rationnelles, on procède par analogie, bien que les théorèmes n'existent pas. Donc :

$$R(z) = \text{polynôme} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c \in M \Rightarrow J_R \text{ connexe} & \Rightarrow \text{possibilité de transition} \\ c \notin M \Rightarrow J_R \text{ non-connexe} & \Rightarrow \text{pas de transition} \end{cases}$$

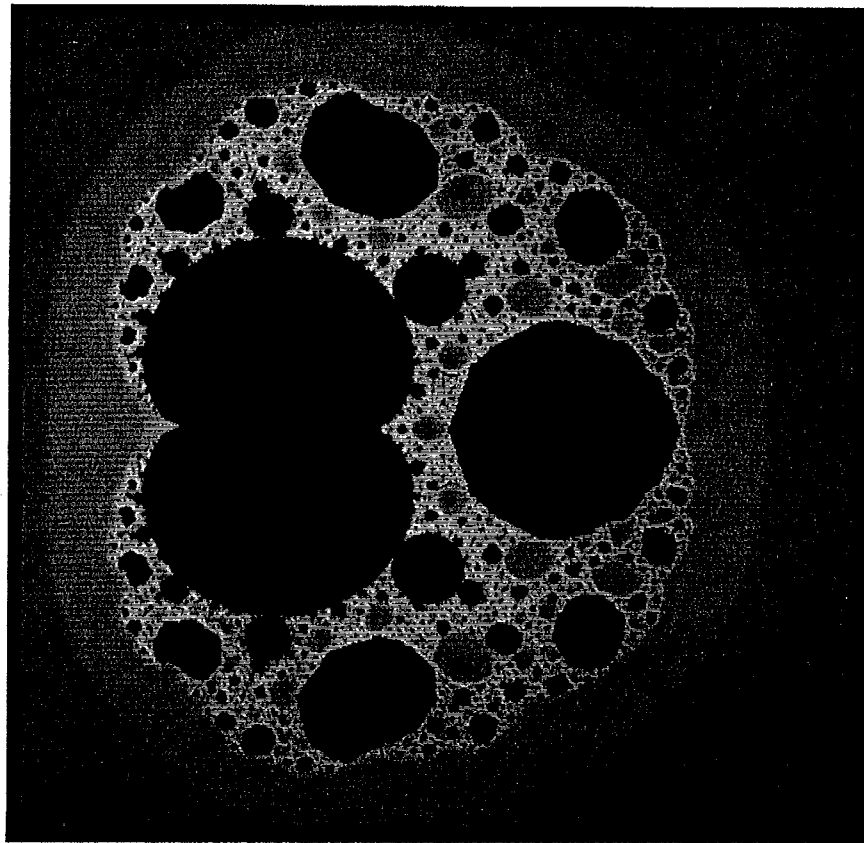
$$R(z) = \text{fonction rationnelle} \quad \Rightarrow \quad \text{pas de tels résultats}$$

Dans le cas d'un polynôme, l'étude de M est très riche en renseignements ; seuls les points $\in M$ peuvent fournir des modèles ayant des transitions de phase. Bien entendu, M ne nous donne pas cette information pour les cartes rationnelles.

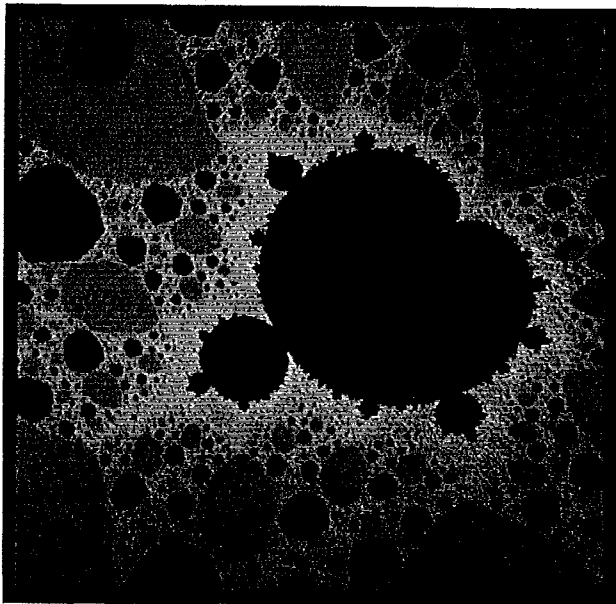
Afin de mieux comprendre ce que l'étude des ensembles de type Mandelbrot peut nous donner en renseignements, nous allons une fois de plus considérer le réseau en diamant. Comme on l'a montré en §5.2.2, on peut se contenter d'étudier le comportement du point critique $z_c = 0$. Comme on va le voir, la nature des frontières entre les différents bassins dépend du comportement de ce point $z_c = 0$. La figure 6.6 illustre les trois ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{q \in \mathbb{C} : R^n(0) \rightarrow 1 \text{ pour } n \rightarrow \infty\} \\ A_2 &= \{q \in \mathbb{C} : R^n(0) \rightarrow \infty \text{ pour } n \rightarrow \infty\} \\ M &= \mathbb{C} \setminus (A_1 \cup A_2) \end{aligned}$$

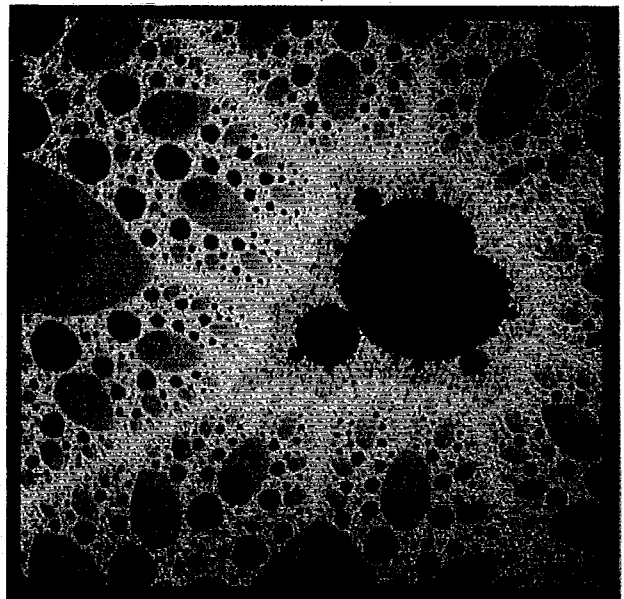
Donc, A_1 représente l'ensemble des paramètres q pour lesquels le point $z = 0$ donnera un système paramagnétique ($z \rightarrow 1$), alors que A_2 est l'ensemble des paramètres tels que $z = 0$ donnera un système ferromagnétique ($z \rightarrow \infty$). Finalement, M représente l'ensemble des paramètres tels que $z = 0$ n'appartient à aucune des deux phases : cela veut dire que pour $q \in M$, $z = 0$ peut appartenir à un autre type de phase (antiferromagnétique par exemple) ou encore $z = 0 \in J_R$.



(a) figure complète ; $-1,0 \leq \Re(q) \leq 4,0$
 $-2,5 \leq \Im(q) \leq 2,5$



(b) zoom 1 ; $1,87 \leq \Re(q) \leq 2,14$
 $1,50 \leq \Im(q) \leq 1,77$



(c) zoom 2 ; $1,9203 \leq \Re(q) \leq 1,9287$
 $1,5763 \leq \Im(z) \leq 1,5847$

Figure 6.6: Les trois ensembles de type Mandelbrot : (a) l'ensemble au complet, avec A_1 (bleu), A_2 (rouge) et M (noir) ; (b) zoom d'une partie de M ; (c) zoom d'une partie de (b). Ces zooms montrent le *chaos* près de la frontière de M .

D'après un théorème de Fatou, A_1 et A_2 ne peuvent avoir d'autre attracteur, alors que M peut en contenir plusieurs autres [Peitgen et Richter ; 1986].

La figure 6.6(a) nous montre la morphologie des ensembles de type Mandelbrot. Comme on vient de le dire, tout paramètre q à l'extérieur de M donne un F_R ne possédant que deux attracteurs (1 et ∞), *i.e.* qu'il ne peut y avoir que deux phases : ferromagnétique ou paramagnétique. En revanche, dans les régions noires de M , q peut donner naissance à des systèmes plus complexes : en fait, pour $q \in M$, il y a nécessairement un troisième attracteur (de par la définition même de M), et il peut y en avoir d'avantage.

A l'examen de la figure 6.6(a), on remarque que A_2 (rouge) et M (noir) sont compris à l'intérieur d'une sorte de "chou-fleur" : à l'extérieur de cette région, on ne retrouve que A_1 (bleu), alors qu'à l'intérieur, on retrouve A_1, A_2 et M .

Si q est choisi à l'extérieur du chou-fleur, J_R est alors un cercle plus ou moins déformé (*i.e.* une courbe de Jordan) dont le centre (où l'on retrouve $z = 0$) correspond à un domaine paramagnétique et l'extérieur à un domaine ferromagnétique [voir les figures de l'appendice C]. Si q est à l'intérieur du chou-fleur, mais pas dans M , alors J_R est un cercle de plus en plus déformé. Encore une fois, il n'y a que deux bassins possibles, mais $z = 0$ appartient au domaine paramagnétique si $q \in A_1$ et au domaine ferromagnétique si $q \in A_2$. Bien entendu, les différents bassins de F_R alternent comme on l'a vu pour le modèle d'Ising sur réseau en diamant [figure 6.3].

Il y a donc alternance entre les deux domaines magnétiques : le bassin où $z = 0$ se situe change de comportement magnétique à mesure que q passe de A_1 à A_2 . Comme nous le montrent les zooms de la figure 6.6, cette alternance devient de plus en plus rapide à mesure que l'on s'approche de M ; pour $q \rightarrow M$, cela prend un caractère chaotique. Ces comportements semblent être les prémices à l'apparition d'une nouvelle phase magnétique au moment où l'on pénètre dans M .

Pour tous les points de M , il y a au moins trois phases. Donc, M nous spécifie les paramètres q pouvant nous donner des modèles avec trois phases ou plus (anti-ferromagnétique par exemple). Il est à noter, comme nous le montrent les zooms, que M donne naissance à des ensembles de Mandelbrot. Ceci vient du fait que localement, toute loi dynamique peut toujours être approximée par une carte quadratique. Il est tout de même surprenant de revoir surgir l'ensemble de Mandelbrot complètement intact pour des cartes dynamiques très différentes.

En terminant cette section, il faut mentionner que l'étude des ensembles de type Mandelbrot n'est pas toujours aussi simple. Il faut d'abord trouver les points critiques de $R(z)$, et ce de façon analytique afin de pouvoir explorer l'espace des paramètres facilement. Pour des cartes de degré élevé, cela peut s'avérer impossible : il faudrait alors les trouver numériquement, pour chaque valeur du paramètre q . Ensuite, il faudrait tous les itérer pour savoir vers quels attracteurs ils se déplacent. Enfin, il faudrait déterminer s'il faut ou non suivre l'orbite directe correspondant à chacun. Ceci demanderait un temps de calcul énorme et la mise au point de logiciels sophistiqués.

Lorsque les points critiques sont connus analytiquement, il faut déterminer parmi ces derniers ceux dont il faudra suivre l'orbite directe. Enfin, pour chacun des points dont il faut suivre l'orbite, on aura des ensembles de type Mandelbrot différents. Notons que l'exemple précédent est un peu spécial, car les points critiques $z_c = 0$ et $z_c = 1 - q$ donnent les mêmes ensembles (voir §5.2.2).

Maintenant que toute l'information que l'on peut tirer des différents ensembles est connue, voyons les résultats obtenus pour différents réseaux hiérarchiques sur lesquels on étudie le modèle de Potts.

6.3 Résultats

Nous avons appliqué les différentes techniques développées tout au long de ce travail au modèle de Potts sur réseau hiérarchique. Les réseaux que nous avons étudiés sont les réseaux en diamant généralisés et les réseaux en collier généralisés. Dans cette section, nous exposerons les résultats obtenus et les comparerons à ceux publiés. Notons que les figures correspondantes sont illustrées à l'appendice C.

6.3.1 Réseau en diamant généralisé

La TGR est donnée par (4.55) :

$$R(z) = \left[\frac{(z + q - 1)^s + (q - 1)(z - 1)^s}{(z + q - 1)^s - (z - 1)^s} \right]^p$$

s	p	d	q	z_c	λ_K	ν	α	ref.	
1	1	2	2	$1 + \sqrt{2}$		1,3271		1	
2	2	2	1	2,618 034		1,635 280		1	
			2	3,382 975 767	1,678 573 510		-0,676 531 579	2	
				0,2956					3
			3	4,0		1,204 710		1	
			4	4,538 5847		1,124 161		1	
			100	25,620 448				1	
3	2	1,63	2	8,35			-0,902	4	
				0,120			-0,902	4	
3	3	2	2	$2 + \sqrt{5}$		1,3548		1	
4	4	2	2	5,023 384		1,3706		1	

1. Ottavi et Albinet ; 1987.
2. Derrida, Itzykson et Luck ; 1984.
3. Derrida, De Seze et Itzykson ; 1983.
4. Peitgen et Richter ; 1985.

Tableau 6.2: Résultats publiés pour les réseaux en diamant.

Pour chaque tableau, on utilisera la notation suivante :

$$\underline{R(z)} \implies \underline{s \ p}$$

R_1	2	2
R_2	3	2
R_3	3	3
R_4	4	4
R_5	2	4

Le tableau 6.2 donne la liste des résultats publiés pour ce type de réseau.

Nos résultats sont résumés dans les tableaux 6.3 et 6.4. Le premier donne la détermination des points d'accumulation sur l'axe réel positif, avec la précision de la mesure ainsi que les résultats pour les différents zooms exécutés. Pour sa part, le tableau 6.4 donne les résultats calculés à partir des données du tableau 6.3 ; on peut alors comparer ces résultats à ceux du tableau 6.2.

Pour la plupart des points d'accumulation, on remarque que deux zooms seraient

$R(z)$	q	image totale	zoom 1	zoom 2	zoom 3
		z_c	z_c	z_c	z_c
R_1	1	-	-	$0,3525 \pm 0,0002$	-
		-	-	$0,3837 \pm 0,0002$	-
		-	$0,387 \pm 0,001$	$0,3872 \pm 0,0002$	-
		-	$0,399 \pm 0,002$	$0,3988 \pm 0,0002$	-
		-	$0,440 \pm 0,002$	$0,4401 \pm 0,0002$	-
$0,62 \pm 0,03$		$0,617 \pm 0,002$	-	-	
$2,60 \pm 0,03$		$2,616 \pm 0,002$	-	-	
R_1	2	$0,29 \pm 0,03$	$0,295 \pm 0,001$	$0,295\ 59 \pm 2 \times 10^{-6}$	$0,295\ 597 \pm 1 \times 10^{-6}$
		$3,38 \pm 0,03$	$3,383 \pm 0,002$	$3,382\ 93 \pm 4 \times 10^{-6}$	$3,382\ 976 \pm 2 \times 10^{-6}$
	3	$0,00 \pm 0,02$	$0,000 \pm 0,001$	-	-
		$3,98 \pm 0,02$	$4,000 \pm 0,001$	-	-
	4	$-0,27 \pm 0,02$	-	-	-
$+4,52 \pm 0,02$		$4,5383 \pm 0,0008$	-	-	
100	$-15,5 \pm 0,2$	-	-	-	
	$+25,3 \pm 0,2$	$25,617 \pm 0,004$	-	-	
R_2	2	$0,09 \pm 0,07$	$0,119 \pm 0,002$	-	-
		$8,30 \pm 0,02$	$8,352 \pm 0,002$	-	-
R_3	2	$0,21 \pm 0,03$	$0,235 \pm 0,001$	-	-
		$4,24 \pm 0,02$	$4,235 \pm 0,001$	-	-
R_4	2	$0,19 \pm 0,06$	$0,199 \pm 0,001$	-	-
		$5,00 \pm 0,05$	$5,0026 \pm 0,0008$	-	-
R_5	2	$0,59 \pm 0,02$	$0,5930 \pm 0,0008$	-	-
		$1,66 \pm 0,02$	$1,6852 \pm 0,0004$	-	-

Tableau 6.3: Points d'accumulation mesurés sur les graphiques.

$R(z)$	s	p	d	q	z_c	pt fixe	λ_K	ν	α
-	1	1	2	2	-	-	-	-	-
R_1	2	2	2	1	0,3825	non	10,6509	0,2930	1,4140
					0,3837	non	11,0662	0,2883	1,4233
					0,3872	non	12,3927	0,2754	1,4493
					0,3988	non	18,3956	0,2380	1,5240
					0,4401	non	111,0335	0,1472	1,7057
					0,617	non	-27,954	0,208	1,584
				2,616	oui	1,527	1,637	-1,275	
				2	3,382 976	oui	1,678 574	1,338 266	-0,676 531
					0,295 597	non	-19,210 623	0,234 531	1,530 938
				3	4,000	oui	1,778	1,205	-0,409
4	4,5383	oui	1,8525	1,1243	-0,2486				
100	25,617	oui	2,788	0,676	0,648				
R_2	3	2	1.63	2	8,352	oui	1,854	1,779	-0,902
					0,119	oui	1,852	1,783	-0,908
R_3	3	3	2	2	4,235	oui	2,249	1,356	-0,711
					0,235	oui	2,243	1,360	-0,720
R_4	4	4	2	2	5,0026	oui	2,7219	1,3844	-0,7689
					0,199	non	-69,498	0,327	1,346
R_5	2	4	3	2	1,6852	oui	1,9162	1,0658	-1,1975
					0,5930	non	-5,4584	0,4084	0,7747

Tableau 6.4: Résultats calculés à partir des données du tableau 6.3.

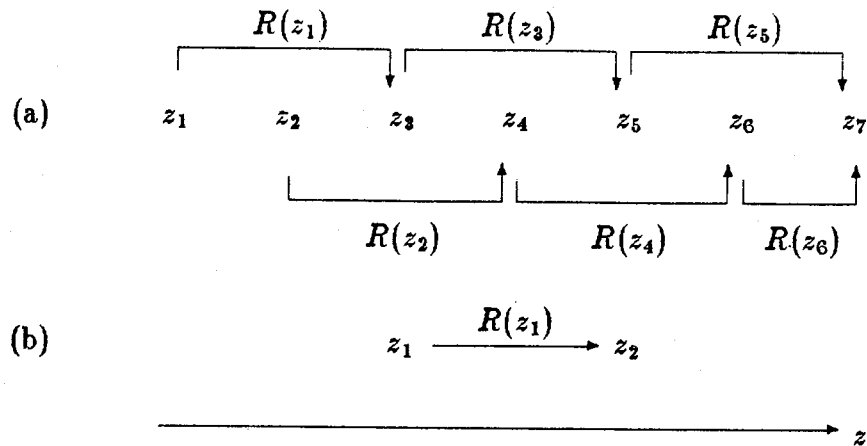


Figure 6.7: Comportement des points d'accumulation sous itération : (a) pour R_1 avec $s = p = 2$ et $q = 1$; (b) pour R_1 avec $s = p = q = 2$ et R_4 et R_5 .

suffisants pour obtenir une précision acceptable : dans la majorité des cas, nos résultats sont en accord avec ceux publiés. On remarque de plus que notre méthode graphique permet de trouver des points d'accumulation supplémentaires que les techniques numériques traditionnelles ne permettent pas de mettre en évidence. C'est notamment le cas pour $s = p = 2$ et $q = 1$, où plusieurs points d'accumulation ont été découverts sur nos graphiques [voir le tableau 6.3 et les figures correspondantes de l'appendice C]. Ces points d'accumulation ne sont cependant pas tous des points fixes : cela signifie qu'il y a une transition de phase (ce sont des points d'accumulation, donc des singularités de Yang-Lee), mais que l'on ne peut utiliser les outils du GR pour calculer les exposants critiques. Nous l'avons tout de même fait pour voir les résultats que l'on obtiendrait. Le tableau 6.4 indique si les points d'accumulation sont des points fixes ou non. La figure 6.7 illustre le comportement de ces points d'accumulation sous itération.

Notons finalement que notre méthode est limitée aux $R(z)$ de degré ≥ 2 . Ainsi, il nous est impossible de l'utiliser pour le cas $s = p = 1$ et $q = 2$. En effet, dans ce cas, $R(z)$ est linéaire :

$$R(z) = \frac{(z + q - 1) + (q - 1)(z - 1)}{(z + q - 1) - (z - 1)} = z$$

et $\deg(R)=1$, de sorte que notre méthode est inutilisable. C'est cependant le seul cas rencontré. Voyons maintenant le réseau en collier.

s	p	d	q	z_c	λ_K	ν	α	ref.
1	1	2	2	$1 + \sqrt{2}$		1,3271		1
2	2	2	1	$(1 + \sqrt{5})/2$		1,635 280		1
			2	1,839 287		1,338 266		1
			3	2,0		1,204 710		1
			4	2,130 395		1,124 161		1
			100	5,061 6645				1
3	3	2	2	$(1 + \sqrt{5})/2$		1,3548		1
4	4	2	2	1,497 094		1,3706		1

1. Ottavi et Albinet ; 1987.

Tableau 6.5: Résultats publiés pour le réseau en collier.

6.3.2 Réseau en collier généralisé

La TGR est donnée par (4.56) :

$$R_c(z) = \frac{(z^p + q - 1)^s + (q - 1)(z^p - 1)^s}{(z^p + q - 1)^s - (z^p - 1)^s}$$

Les résultats publiés pour ce type de réseau sont donnés au tableau 6.5 alors que nos résultats se trouvent dans les tableaux 6.6 et 6.7 : le tableau 6.6 donne la détermination des points d'accumulation (avec les zooms) et le tableau 6.7 donne les résultats calculés à partir de ces points d'accumulation.

Les mêmes commentaires que ceux de la section précédente s'appliquent ici : la précision est raisonnable et l'on retrouve plus de points d'accumulation qu'avec les méthodes traditionnelles. Ces points ne sont pas tous des points fixes, comme l'indique le tableau 6.7. Ainsi, les deux cas $s = p = 2$ avec $q = 1$ et $q = 2$ suivent le schéma de la figure 6.7(b) sous itération. Finalement, le cas $s = p = 1$ avec $q = 2$ est aussi une carte linéaire $R(z) = z$, de sorte que la méthode ne s'applique pas non plus ici. Voyons maintenant la mesure de l'angle d'analyticité.

6.3.3 Angle d'approche θ

Les résultats donnés ici portent sur le réseau en diamant avec un modèle d'Ising ($s = p = q = 2$). Le tableau 6.8 donne les résultats publiés et obtenus de nos figures.

$R(z)$	q	image totale	zoom 1
		z_c	z_c
R_{c1}	1	0,78 \pm 0,03 1,60 \pm 0,04	- -
	2	0,53 \pm 0,03 1,82 \pm 0,03	- 1,838 \pm 0,004
	3	0,00 \pm 0,04 1,97 \pm 0,03	- -
	4	2,11 \pm 0,02	-
	100	5,03 \pm 0,03	-

Tableau 6.6: Points d'accumulation mesurés.

$R(z)$	s	p	d	q	z_c	pt fixe	λ_K	ν	α
-	1	1	2	2	-	-	-	-	-
R_{c1}	2	2	2	1	0,78	non	-15,81	0,25	1,50
					1,60	oui	1,51	1,69	-1,39
				2	1,838	oui	1,677	1,341	-0,682
					0,53	non	-6,19	0,38	1,24
				3	1,97	oui	1,74	1,25	-0,51
				4	2,11	oui	1,83	1,15	-0,30
			100	5,03	oui	2,75	0,68	0,63	
R_{c2}	3	3	2	2	-	-	-	-	-
R_{c3}	4	4	2	2	-	-	-	-	-

Tableau 6.7: Résultats calculés à partir des données du tableau 6.6.

z_c	θ	publié *	zoom 1	zoom 2	zoom 3
0,295 597	θ_1	1,159 171 214	1,10 \pm 0,03	1,18 \pm 0,02	1,18 \pm 0,02
	θ_2	1,159 171 214	1,25 \pm 0,03	1,19 \pm 0,02	1,23 \pm 0,02
3,382 976	θ_1	1,159 171 214	1,15 \pm 0,02	1,18 \pm 0,02	1,18 \pm 0,02
	θ_2	1,159 171 214	1,21 \pm 0,02	1,18 \pm 0,02	1,18 \pm 0,02

* Voir [Derrida, Itzykson et Luck ; 1984].

Tableau 6.8: Angle d'analyticité.

Comme on peut le constater, le résultat du zoom 3 est à peu près le même pour tous les cas, alors que pour les zooms 1 et 2, θ_1 et θ_2 varient beaucoup. Cependant, l'augmentation de la précision n'est pas significative d'un zoom à l'autre ; il faudrait probablement pousser beaucoup plus loin l'ordre des zooms pour obtenir une précision satisfaisante et améliorer les méthodes graphiques afin d'extraire les angles de façon plus systématique.

Voilà qui termine ce court exposé des résultats obtenus. Les figures correspondant aux différents résultats exposés ici sont illustrées à l'appendice C.

Conclusion

Comme nous venons de le voir au chapitre 6, l'objectif principal du présent travail a été atteint, *i.e.* que le lien entre les phénomènes critiques et la géométrie fractale a été mis en évidence. En effet, l'accord entre les résultats obtenus par des méthodes numériques (valeurs publiées) et nos résultats tirés des graphiques témoigne bien de la relation intime entre les phénomènes critiques et la géométrie fractale.

Comme on l'a noté en §6.3, l'approche géométrique permet de trouver des points d'accumulation supplémentaires. Or, ces points ne sont pas tous des points fixes. Dans la plupart des cas [diamant : R_1 ($q = 2$), R_4 et R_5 ; collier : R_{c1} ($q = 2$)], ces points sont projetés sur des points fixes du fait de la conjugaison $R(z) = R(1/z)$; on note que dans ces cas, il n'y a que deux phases possibles (ferromagnétique et paramagnétique : voir l'appendice C). Pour le cas $q = 1$ de R_1 et R_{c1} (diamant et collier), le problème est plus compliqué. En effet, il y a trois phases présentes et les différents points d'accumulation semblent être les éléments de l'orbite inverse du point fixe $O^-(z_c)$. Une explication aussi simple que celle des cas précédents n'est pas encore disponible pour ce problème-ci ; une analyse plus détaillée s'avère nécessaire. Notons cependant que $q = 1$ signifie qu'il n'y a qu'une seule composante de spin, ce qui est déjà physiquement curieux. Finalement, on note que pour les autres cas où l'on retrouve plus d'un point fixe sur l'axe réel positif (*i.e.* R_2 et R_3 pour le réseau en diamant), il y a trois phases possibles [voir les cartes dynamiques de l'appendice C].

Bien entendu, le lien que nous avons démontré l'a été dans le cadre du problème académique des réseaux hiérarchiques. On peut se poser la question de la possibilité d'appliquer cette méthode à des réseaux de Bravais. L'étape logique pour vérifier la validité de notre approche consisterait à traiter un problème dont l'on possède une solution analytique, *i.e.* le modèle d'Ising sur réseau carré en deux dimensions et sans champ magnétique extérieur. Puisque notre méthode repose sur l'itération des fonctions rationnelles, il faudrait trouver une approximation rationnelle de la TGR pour ce modèle

et vérifier si l'on obtient bien la distribution en cercle des zéros (§2.3) à partir de cette approximation. Les approximants de Padé [Baker et Graves-Morris ; 1981], étant fonctions rationnelles par excellence, semblent les plus adéquats pour cette besogne. Bien entendu, cette vérification dépasse le cadre du présent travail, mais pourrait être réalisée à court terme.

En se rappelant que le calcul des exposants critiques est possible seulement aux points fixes (§3.2.3), on peut aussi comparer les résultats obtenus pour les réseaux hiérarchiques à ceux connus pour les réseaux de Bravais : puisque la forme du réseau ne doit pas avoir d'influence sur les exposants (universalité : §1.3.1), on devrait avoir des résultats proches. Pour le modèle d'Ising, on a [Reichl ; 1987] :

Exposant critique	$d = 2$	$d = 3$
ν	1,0	0,64
α	0,0	0,12

Tous d'abord, à l'examen des tableaux de §6.3, on trouve, pour les points fixes correspondant au modèle d'Ising ($q = 2$) :

Exposant critique	$d = 2$	$d = 3$
ν	1,3 - 1,4	1,07
α	-0,7	-1,20

Notons que pour les points d'accumulation qui ne sont pas des points fixes, les résultats ne sont pas valides (le calcul des exposants critiques ne s'applique pas) : les résultats y sont très divergents. En comparant nos résultats à ceux d'un réseau de Bravais, on ne peut pas dire qu'ils sont très près les uns des autres. Une explication possible de cet écart pourrait se trouver dans la définition de la dimension d pour les réseaux hiérarchiques. En effet, on se rappellera (§4.1.2) que d n'est pas bien définie pour ce type de réseau. En fait, le tableau 6.4 montre bien que pour $d = 1,63$, les résultats s'éloignent encore plus que pour $d = 2$. Une conjecture qui devra être étudiée est la

possibilité de considérer la dimension fractale de la distribution des zéros (ensemble de Julia) au lieu de celle donnée par les définitions de §4.1.2. Malheureusement, nous n'avons pas déterminé ces dimensions pour les différents réseaux étudiés.

Finalement, la dimension fractale de la distribution des zéros pourrait aussi être étudiée en relation avec les résultats des champs conformes appliqués aux modèles de physique statistique en deux dimensions. En effet, pour nos cas où $d = 2$, nos ensembles de Julia devraient avoir des dimensions fractales différentes. Or, ces dimensions sont une propriété intrinsèque du modèle étudié. Il devrait donc y avoir un certain lien entre cette dimension et les résultats découlant des champs conformes (en $d = 2$). En effet, la dimension fractale est une information supplémentaire qui doit être reliée d'une façon ou d'une autre aux champs conformes, car ces derniers permettent de décrire parfaitement les systèmes aux points critiques en $d = 2$.

Comme nous venons de le voir, ce travail soulève beaucoup d'autres questions auxquelles une étude plus longue et plus systématique devrait venir à bout.

Appendice A

Théorèmes de Yang-Lee généralisés

Les théorèmes qui seront donnés ici concernent la distribution des zéros dans le plan complexe du champ magnétique. Nous ne ferons que citer les théorèmes sans les expliquer ; le lecteur désireux d'en connaître davantage à propos de ces théorèmes peut se référer à [Kurtze ; 1979]. Voici donc la liste des théorèmes qui nous intéressent :

Théorème A.1 (Griffiths) *Considérons un système d'Ising de N spins s_i , où le spin i est de grandeur $1/2p_i$ (p_i est entier), i.e., s_i prends les valeurs $-p_i, -p_i + 2, \dots, p_i$. Si le hamiltonien du système est donné par :*

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij}(s_i s_j - p_i p_j) - H \sum_i (s_i - p_i) \quad (\text{A.1})$$

avec $0 \leq J_{ij} \leq \infty$ pour chaque paire i, j , alors les zéros de la fonction de partition

$$Z_N(T, H) = \sum_{s_i} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}}{k_B T}\right)$$

sont confinés à l'axe imaginaire de $h = H/k_B T$.

Théorème A.2 (Suzuki et Fisher) *Soit un modèle d'Ising de spin 1/2 constitué de N spins s_i , dont la fonction de partition est :*

$$Z_N(h) = \sum_{s_i} \exp\left(h \sum_i \mu_i s_i\right) \prod_{\nu=1}^N \prod_{r=1}^{R_\nu} q_{\nu,r}(s_{j(r,1)}, s_{j(r,2)}, \dots, s_{j(r,\nu)}) \quad (\text{A.2})$$

où $R_\nu \leq N! / [\nu!(N-\nu)!]$, les μ_i sont réels et non-négatifs, et les "facteurs partiels de Boltzmann" $q_{\nu,r}$ (qui n'ont pas à être réels) satisfont les deux conditions

$$q_{\nu,r}(-s_{(1)}, \dots, -s_{(\nu)}) = q_{\nu,r}^*(s_{(1)}, \dots, s_{(\nu)}) \quad (\text{A.3})$$

$$|q_{\nu,r}(1, 1, \dots, 1)| \geq \frac{1}{4} \sum_{s(1)} \dots \sum_{s(\nu)} q_{\nu,r}(s(1), \dots, s(\nu)) \quad (\text{A.4})$$

Alors, tous les zéros de $Z_N(h)$ sont purement imaginaires.

Le théorème de Yang-Lee original (Théorème 2.4) apparaît comme un cas spécial de ce dernier théorème, si l'on pose $\mu_i \equiv 1$, $q_{\nu,r} \equiv 1$ pour $\nu \geq 3$, et $q_{2,r}(s_i, s_j) = \exp(K_{ij} s_i s_j)$ avec tous les K_{ij} réels et non-négatifs.

Théorème A.3 (Suzuki et Fisher) Soit un modèle de Heisenberg de spin 1/2 avec N spins et dont le hamiltonien réduit¹ est :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_N = & \frac{1}{2} \sum_{ij} (K_{ij}^x s_i^x s_j^x + K_{ij}^y s_i^y s_j^y + K_{ij}^z s_i^z s_j^z) \\ & + \sum_i (h_i^x s_i^x + h_i^y s_i^y) + h^z \sum_i \mu_i s_i^z \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

où i et j varient de 1 à N , s_i est un opérateur quantique correspondant à un spin 1/2, et les constantes de couplage réduites $K_{ij}^{x,y,z}$ et les champs réduits transverses $h_i^{x,y}$ sont réels. Si les μ_i sont réels et non-négatifs et la condition "ferromagnétique"

$$K_{ij}^z \geq \max(|K_{ij}^x|, |K_{ij}^y|) \quad \forall i, j \quad (\text{A.6})$$

est satisfaite, alors les zéros de la fonction de partition

$$Z_N(h^z) = \text{Tr}[\exp(\bar{\mathcal{H}}_N)] \quad (\text{A.7})$$

se trouvent sur l'axe imaginaire de h^z .

Théorème A.4 (Dunlop et Newman) Considérons un modèle classique de Heisenberg constitué de N trivecteurs unitaires de spins $\mathbf{s}_i = (s_i^1, s_i^2, s_i^3)$, interagissant par l'entremise du hamiltonien réduit

$$\bar{\mathcal{H}}_N = \frac{1}{2} \sum_{ij} \sum_{k=1}^3 K_{ij}^k s_i^k s_j^k + h \sum_i \mu_i s_i^1 \quad (\text{A.8})$$

avec tous les μ_i réels et non-négatifs, et les K_{ij}^k réels satisfaisant

$$K_{ij}^1 \geq \max(|K_{ij}^2|, |K_{ij}^3|) \quad (\text{A.9})$$

¹Par réduit, on entend que les différentes variables ont été "renormalisées" ; K comprend les facteurs J et $k_B T$, h les facteurs H et $g \mu_B$.

Alors, la fonction de partition

$$Z_N(h) = \int ds_1 \dots \int ds_N \exp(\bar{M}_N) \quad (\text{A.10})$$

où les intégrales se font sur la sphère unitaire, est une fonction entière de h , dont tous les zéros sont purement imaginaires.

Le modèle classique de Heisenberg, anisotrope et avec des interactions ferromagnétiques [au sens de (A.9)] est gouverné par un théorème de Yang-Lee. Il existe un théorème similaire pour le modèle classique de spins à deux dimensions, i.e. le modèle XY classique.

Théorème A.5 (Newman) Pour des valeurs de μ_i réelles et non-négatives et des K_{ij} réels qui sont non-négatifs pour $i \neq j$ (mais arbitraire pour $i = j$), les zéros de la fonction de partition d'un système de N spins :

$$Z_N(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N K_{ij} s_i s_j + h \sum_{i=1}^N \mu_i s_i\right) \prod_{i=1}^N d\rho(s_i) \quad (\text{A.11})$$

sont purement imaginaire ssi la mesure $\rho(s)$ satisfait, soit

$$\rho(s) = C[\delta(s - s_0) + \delta(s + s_0)] \quad (\text{A.12})$$

pour un certain C positif et s_0 non-négatif, soit

$$\frac{d\rho}{ds} = C s^{2m} \exp(-rs^2 - us^4) \prod_j \left[1 + \left(\frac{s}{\alpha_j}\right)^2\right] \exp\left(-\frac{s^2}{\alpha_j^2}\right) \quad (\text{A.13})$$

pour un certain C positif, u non-négatif, r réel, m entier et non-négatif, et α_j réel satisfaisant

$$\sum_j \alpha_j^{-4} < \infty \quad (\text{A.14})$$

Avant de clore cet appendice, quelques remarques s'imposent. D'abord, tous les théorèmes ci-hauts restreignent les zéros de la fonction de partition de certains modèles à se situer sur une droite dans le plan complexe du champ magnétique réduit, plus précisément l'axe imaginaire. Ce fait est suffisant pour établir que ces modèles ne peuvent avoir de transition de phase que pour un champ magnétique nul. Cependant, le fait que la location des zéros soit sur une courbe (et non une surface) n'est pas général, comme on l'a déjà mentionné en §2.3.1. Finalement, notons que ces théorèmes ne sont valides que pour des systèmes ferromagnétiques.

Appendice B

Calcul de la TGR pour un réseau non-uniforme

Considérons le réseau de *Wheatstone* non-uniforme illustré à la figure B.1. D'après (4.49), on écrit les hamiltoniens réduits comme :

$$\begin{aligned} H &= 2K\delta_{ij} & H' &= K'_0 + 2K'\delta_{ij} \\ \bar{H} &= 2\bar{K}\delta_{ij} & \bar{H}' &= \bar{K}'_0 + 2\bar{K}'\delta_{ij} \end{aligned} \quad \text{et} \quad (\text{B.1})$$

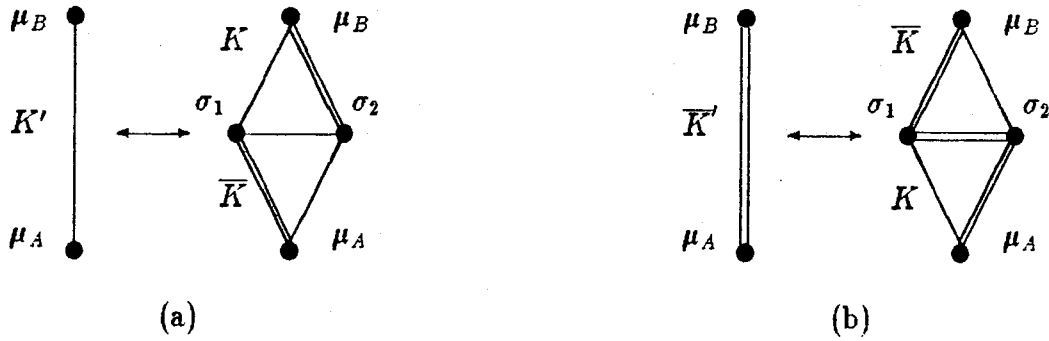


Figure B.1: Réseau non-uniforme de Wheatstone (a) lien non-barré (b) lien barré .

Trouvons d'abord la TGR pour K' . D'après les chapitres 3 et 4, les deux étapes K et K' sont reliées par :

$$\begin{aligned} e^{H'} &= \sum_{\{\sigma\}} e^H = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ \bar{K}\delta_{A1} + K\delta_{A2} + K\delta_{B1} + \bar{K}\delta_{B2} + K\delta_{12} \right\} \\ &= \sum_{\sigma_1}^q \exp \left[2(\bar{K}\delta_{A1} + K\delta_{B1}) \right] \sum_{\sigma_2}^q \exp \left[2(K\delta_{A2} + \bar{K}\delta_{B2} + K\delta_{12}) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Calculons \sum_{σ_2} . Il y a deux possibilités :

1. $\mu_a = \mu_B$ ($\delta_{AB} = 1$)

Suivant la valeur de σ_1 , il y a deux cas :

• $\sigma_1 = \mu_A$ et $\sigma_1 = \mu_B$:

$$\sum_{\sigma_2}^q \exp \left[2(K\delta_{A2} + \bar{K}\delta_{B2} + K\delta_{12}) \right] = e^{4K+2\bar{K}} + q - 1$$

• $\sigma_1 \neq \mu_A$ et $\sigma_1 \neq \mu_B$:

$$\sum_{\sigma_2}^q \exp \left[2(K\delta_{A2} + \bar{K}\delta_{B2} + K\delta_{12}) \right] = e^{2K+2\bar{K}} + e^{2K} + q - 2$$

Ces deux résultats se condensent comme suit :

$$\delta_{AB} \left[e^{K(2+\delta_{A1}+\delta_{B1})} e^{2\bar{K}} + e^{K(2-\delta_{A1}-\delta_{B1})} + q - 2 \right] \quad (\text{B.3})$$

2. $\mu_A \neq \mu_B$ ($\delta_{AB} = 0$)

Ici, il y a trois cas :

• $\sigma_1 = \mu_A$ et $\sigma_1 \neq \mu_B$:

$$\sum_{\sigma_2}^q \exp \left[2(K\delta_{A2} + \bar{K}\delta_{B2} + K\delta_{12}) \right] = e^{4K} + e^{2\bar{K}} + q - 2$$

• $\sigma_1 \neq \mu_A$ et $\sigma_1 = \mu_B$:

$$\sum_{\sigma_2}^q \exp \left[2(K\delta_{A2} + \bar{K}\delta_{B2} + K\delta_{12}) \right] = e^{2K+2\bar{K}} + e^{2K} + q - 2$$

• $\sigma_1 \neq \mu_A$ et $\sigma_1 \neq \mu_B$:

$$\sum_{\sigma_2}^q \exp \left[2(K\delta_{A2} + \bar{K}\delta_{B2} + K\delta_{12}) \right] = 2e^{2K} + e^{2\bar{K}} + q - 3$$

Ces trois équations s'écrivent comme :

$$\begin{aligned} (1 - \delta_{AB}) \left[e^{2K(1+\delta_{A1})} e^{2\bar{K}\delta_{B1}} + (\delta_{A1} + \delta_{B1}) e^{2K(1-\delta_{A1})} e^{2\bar{K}(1-\delta_{B1})} \right. \\ \left. + (1 - \delta_{A1} - \delta_{B1})(e^{2K} + e^{2\bar{K}}) + q - 3 + \delta_{A1} + \delta_{B1} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Alors, (B.2) devient :

$$\begin{aligned}
e^{H'} = & \delta_{AB} \sum_{\sigma_1}^q \left[e^{K(2+\delta_{A1}+\delta_{B1})} e^{2\bar{K}} + e^{K(2-\delta_{A1}-\delta_{B1})} + q - 2 \right] \\
& + (1 - \delta_{AB}) \sum_{\sigma_1}^q \left[e^{2K(1+\delta_{A1})} e^{2\bar{K}\delta_{B1}} + (\delta_{A1} + \delta_{B1}) e^{2K(1-\delta_{A1})} e^{2\bar{K}(1-\delta_{B1})} \right. \\
& \left. + (1 - \delta_{A1} - \delta_{B1})(e^{2K} + e^{2\bar{K}}) + q - 3 + \delta_{A1} + \delta_{B1} \right] \quad (B.5)
\end{aligned}$$

On voit bien que les sommes de (B.5) ne sont pas présentes en même temps. En effet, si $\delta_{AB} = 1$ seule la première somme contribue, alors que pour $\delta_{AB} = 0$, il n'y a que la deuxième qui importe. On peut donc examiner les deux sommes séparément :

1. $\delta_{AB} = 1$

Dans ce cas, seule la première somme contribue dans (B.5). Donc, on a $\mu_A = \mu_B$: il y a deux possibilités :

• $\sigma_1 = \mu_A = \mu_B$:

Alors, $\delta_{A1} = \delta_{B1} = 1$ de sorte qu'on retrouve le terme

$$\delta_{AB} e^{2(K+\bar{K})} \left[e^{4K} e^{2\bar{K}} + q - 1 \right]$$

une fois.

• $\sigma_1 \neq \mu_A$ et $\sigma_1 \neq \mu_B$:

On a alors $\delta_{A1} = \delta_{B1} = 0$ et l'on retrouve $(q - 1)$ fois le terme suivant dans la somme :

$$\delta_{AB} \left[e^{2K} e^{2\bar{K}} + e^{2K} + q - 2 \right]$$

Donc, la première somme de (B.5) s'écrit comme :

$$\delta_{AB} \sum_{\sigma_1}^q \dots = \delta_{AB} \left\{ e^{2K} e^{2\bar{K}} (e^{4K} e^{2\bar{K}} + q - 1) + (q - 1)(e^{2K} e^{2\bar{K}} + e^{2K} + q - 2) \right\} \quad (B.6)$$

2. $\delta_{AB} = 0$

Ici, c'est la deuxième somme de (B.5) qui contribue. On a dans ce cas $\mu_A \neq \mu_B$ et il y a trois possibilités :

- $\sigma_1 = \mu_A$:

Alors, $\delta_{A1} = 1$ et $\delta_{B1} = 0$ et on retrouve le terme suivant une fois dans la deuxième somme de (B.5)

$$(1 - \delta_{AB})e^{2\bar{K}} [e^{4K} + e^{2\bar{K}} + q - 2]$$

- $\sigma_1 = \mu_B$:

Alors, $\delta_{A1} = 0$ et $\delta_{B1} = 1$ et on retrouve le terme suivant une fois dans la deuxième somme de (B.5)

$$(1 - \delta_{AB})e^{2K} [e^{2K}e^{2\bar{K}} + e^{2K} + q - 2]$$

- $\sigma_1 \neq \mu_A$ et $\sigma_1 \neq \mu_B$:

Dans ce cas, $\delta_{A1} = \delta_{B1} = 0$ et on retrouve $(q - 2)$ fois le terme suivant dans la deuxième somme de (B.5)

$$(1 - \delta_{AB}) [e^{2K} + e^{2K} + e^{2\bar{K}} + q - 3]$$

Finalement, la deuxième somme de (B.5) devient :

$$(1 - \delta_{AB}) \sum_{\sigma_1}^q \dots = (1 - \delta_{AB}) \left\{ 2e^{4K}e^{2\bar{K}} + e^{4K} + e^{4\bar{K}} \right. \\ \left. + (q - 2) [3e^{2K} + 2e^{2\bar{K}} + q - 3] \right\} \quad (B.7)$$

Posant

$$\begin{aligned} \omega' &\equiv e^{2K'} \\ \omega &\equiv e^{2K} \\ \bar{\omega} &\equiv e^{2\bar{K}} \end{aligned}$$

on peut regrouper (B.6) et (B.7) dans (B.2) on l'on obtient :

$$e^{K'_0} \omega'^{\delta_{AB}} = \delta_{AB} \left\{ \omega^3 \bar{\omega}^2 + (q - 1)(2\omega \bar{\omega} + \omega + q - 2) \right\} \\ + (1 - \delta_{AB}) \left\{ 2\omega^2 \bar{\omega} + \bar{\omega}^2 + \omega^2 + (q - 2)(3\omega + 2\bar{\omega} + q - 3) \right\} \quad (B.8)$$

Comme on l'a déjà mentionné , il y a deux possibilités :

1. $\delta_{AB} = 1$:

Alors (B.8) donne

$$e^{K'_0} \omega' = \omega^3 \bar{\omega}^2 + (q - 1)(2\omega \bar{\omega} + \omega + q - 2)$$

2. $\delta_{AB} = 0$:

Alors (B.8) donne

$$e^{K'_0} = 2\omega^2\bar{\omega} + \bar{\omega}^2 + \omega^2 + (q-2)(3\omega + 2\bar{\omega} + q-3)$$

Divisant ces deux équations l'une par l'autre, on trouve finalement :

$$\omega' = \frac{\omega^3\bar{\omega}^2 + (q-1)(2\omega\bar{\omega} + \omega + q-2)}{2\omega^2\bar{\omega} + \bar{\omega}^2 + \omega^2 + (q-2)(3\omega + 2\bar{\omega} + q-3)} \quad (\text{B.9})$$

On a donc retrouvé l'expression (4.53). Pour l'autre expression, *i.e.* (4.54) on aura :

$$e^{\bar{K}'_0} e^{2\bar{K}'_1} \delta_{AB} = \sum_{\sigma_1}^q \exp [2(K\delta_{A1} + \bar{K}\delta_{B1})] \sum_{\sigma_2}^q \exp [2(\bar{K}\delta_{A2} + K\delta_{B2} + \bar{K}\delta_{I2})] \quad (\text{B.10})$$

En comparant avec (B.2), on remarque que la seule différence consiste à interchanger le K et le \bar{K} . Le reste des calculs étant les mêmes, il suffit donc aussi d'interchanger K et \bar{K} dans (B.10) pour obtenir l'expression désirée. On retrouve ainsi le résultat (4.54) :

$$\bar{\omega}' = \frac{\bar{\omega}^3\omega^2 + (q-1)(2\bar{\omega}\omega + \bar{\omega} + q-2)}{2\bar{\omega}^2\omega + \omega^2 + \bar{\omega}^2 + (q-2)(3\bar{\omega} + 2\omega + q-3)} \quad (\text{B.11})$$

Voilà qui termine l'exemple de calcul de la TGR pour un réseau de Wheatstone non-uniforme.

Appendice C

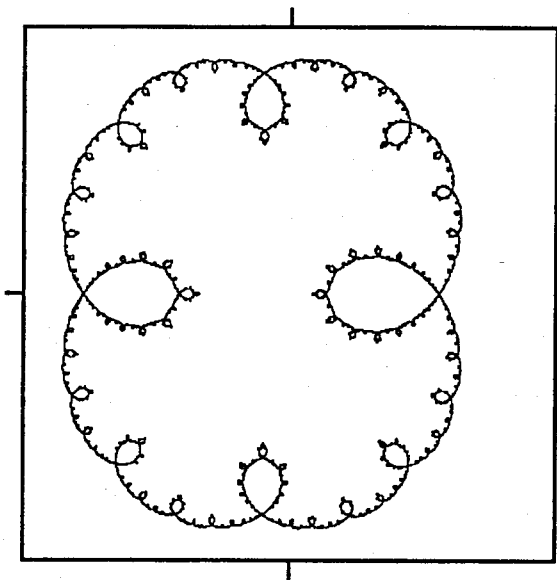
Figures de Julia et de Fatou

Cet appendice contient la plupart des graphiques ayant servis à la détermination des résultats donnés en §6.3. Il est séparé en deux grandes parties : les ensembles de Julia (noir et blanc) et les ensembles de Fatou (carte dynamique couleur).

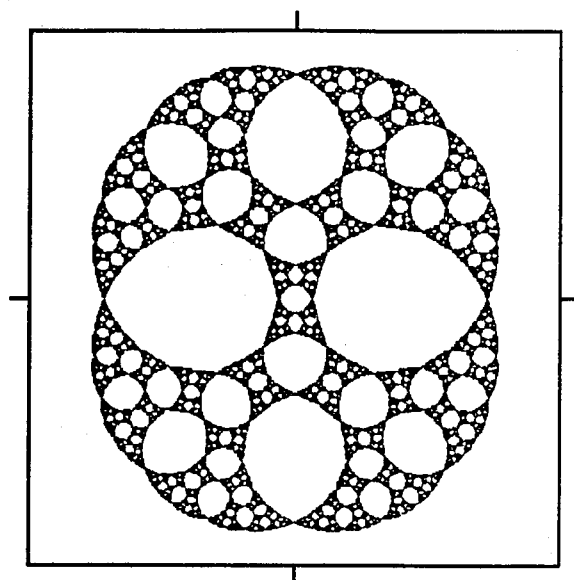
La première partie comprend les résultats pour les réseaux en diamant et en collier. Les figures C.1, C.2, C.3 et C.4 portent sur le réseau en diamant ; on y illustre les ensembles pour R_1 avec $q = 1, 2, 3, 4$ et 100, de même que les zooms pour les cas $q = 1$ et 2, ainsi que les ensembles pour R_2, R_3, R_4, R_5 . Les figures C.5 et C.6 montrent, pour leur part, les ensembles pour le réseau en collier, pour R_{c1} avec $q = 1, 2, 3, 4$ et 100.

La deuxième partie donne les cartes dynamiques correspondant aux ensembles de la première partie. Les figures C.7 et C.8 illustrent les ensembles de Fatou pour le réseau en diamant : C.7 pour R_1 avec $q = 1, 2, 3, 4$ et C.8 pour R_2, R_3, R_4, R_5 . Les figures C.9 et C.10 montrent les cartes du réseaux en collier : C.9 pour R_{c1} avec $q = 1, 2, 3, 4$ et C.10 pour R_{c1} avec $q = 100$. Notons que les couleurs ont une signification précise :

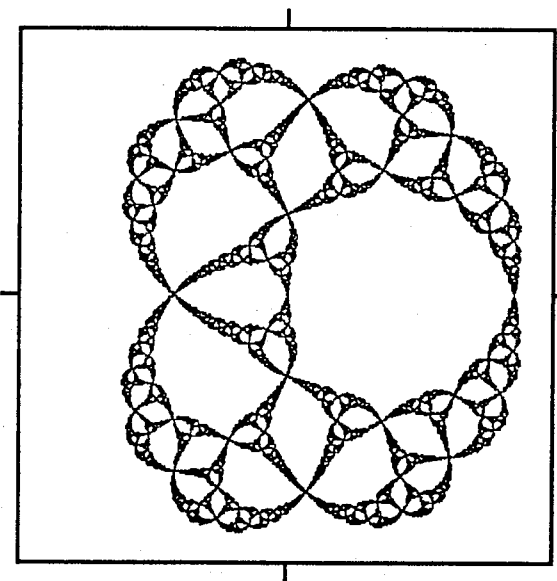
rouge	→	ferromagnétique
bleu	→	anti-ferromagnétique
vert	→	paramagnétique



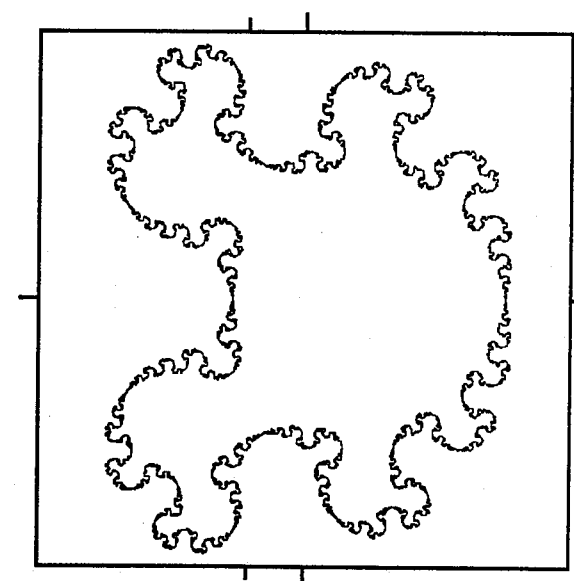
(a) J_R pour $q = 1$; $-6 \leq \Re(z) \leq 4$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$



(b) J_R pour $q = 2$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

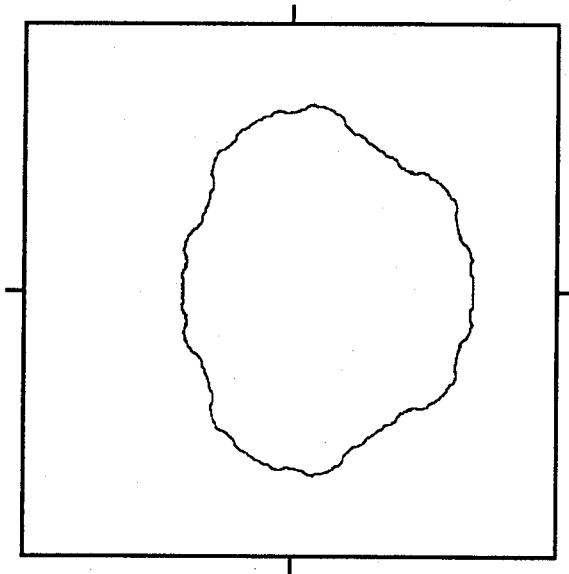


(c) J_R pour $q = 3$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

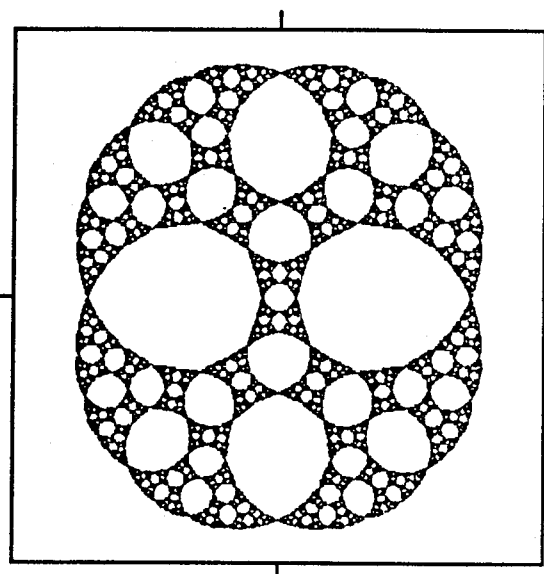


(d) J_R pour $q = 4$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

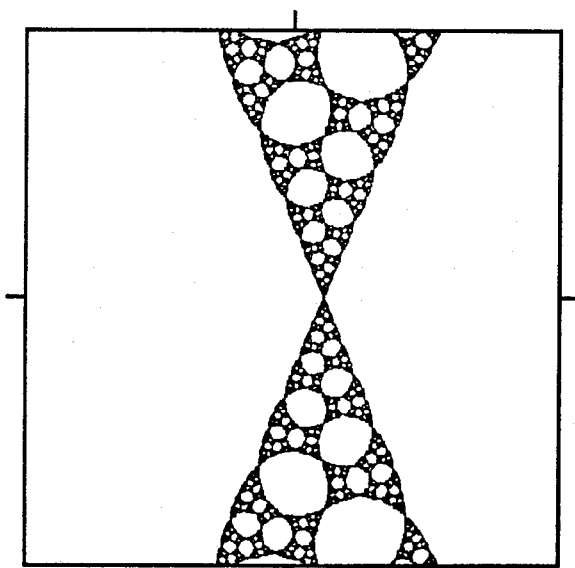
Figure C.1: Ensembles de Julia pour le modèle en diamant ($p = s = 2$), avec différentes valeurs du paramètre q : $b = d = 2$.



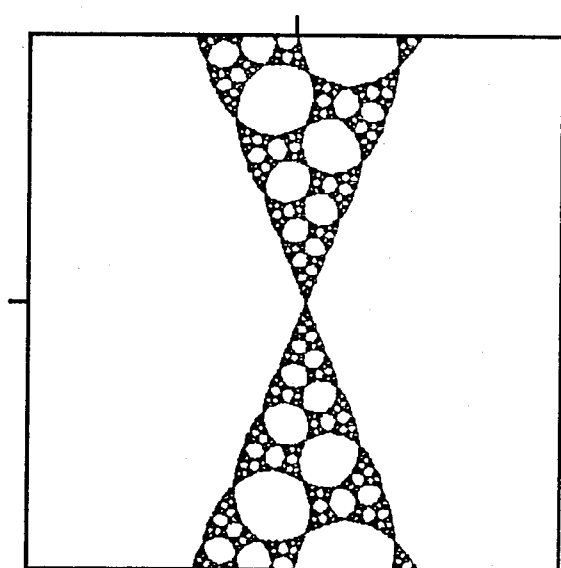
(a) J_R pour $q = 100$; $-40 \leq \Re(z) \leq 40$
 $-40 \leq \Im(z) \leq 40$



(b) J_R pour $q = 2$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

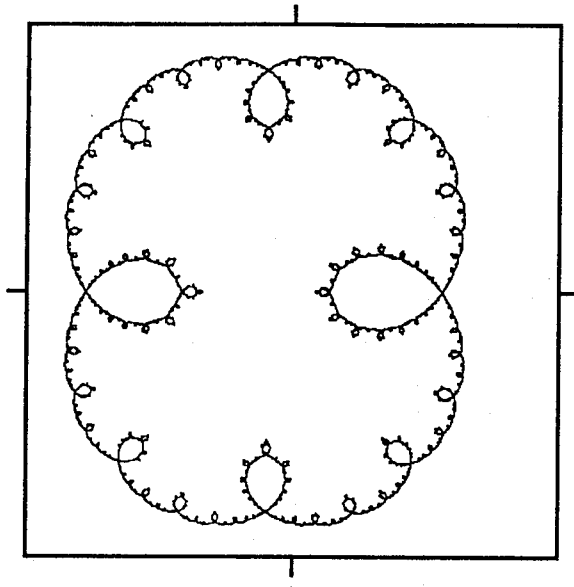


(c) $0,295590 \leq \Re(z) \leq 0,295604$
 $-0,000007 \leq \Im(z) \leq 0,000007$

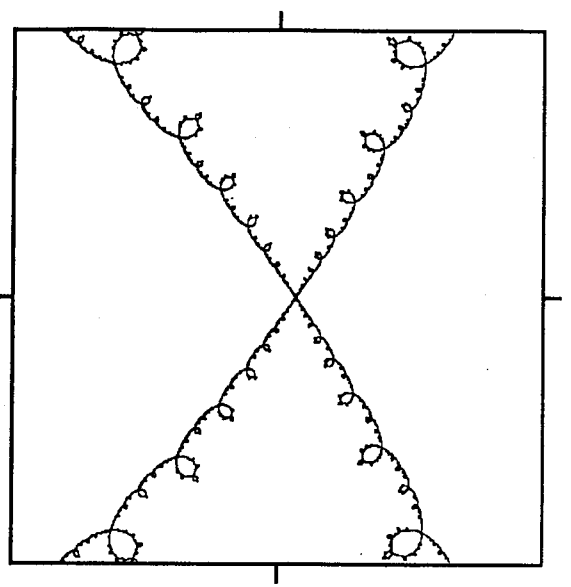


(d) $3,38300 \leq \Re(z) \leq 3,38304$
 $-0,00002 \leq \Im(z) \leq 0,00002$

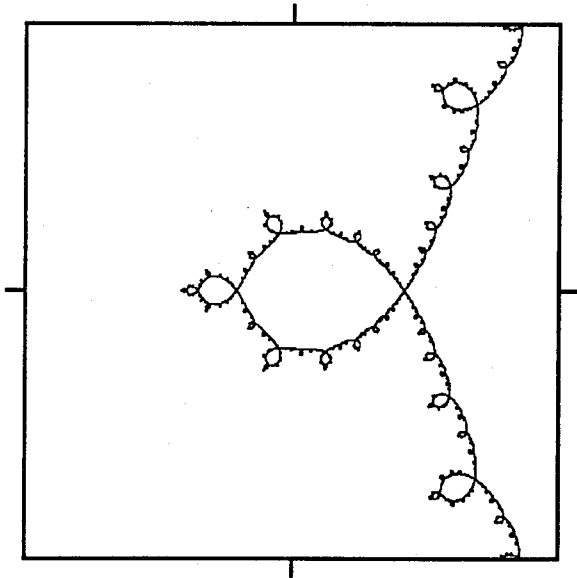
Figure C.2: Ensembles de Julia pour le modèle en diamant ($p = s = 2$), avec différentes valeurs du paramètre q : (c) et (d) sont des zooms des régions de (b) où se trouvent les points d'accumulation.



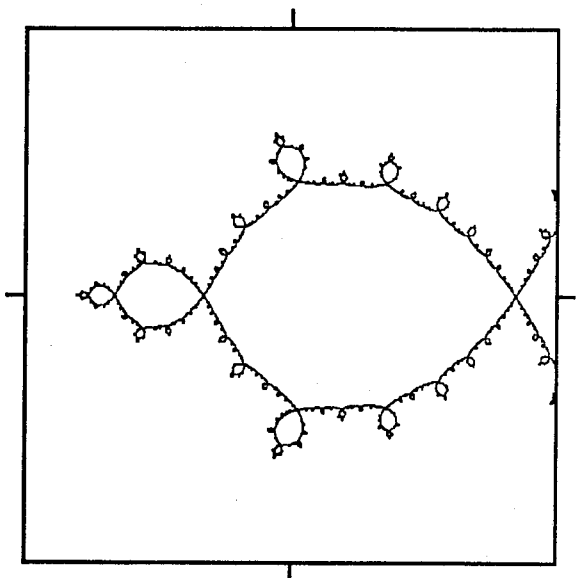
(a) J_R pour $q = 1$; $-6 \leq \Re(z) \leq 4$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$



(b) $2,3 \leq \Re(z) \leq 2,9$
 $-0,3 \leq \Im(z) \leq 0,3$

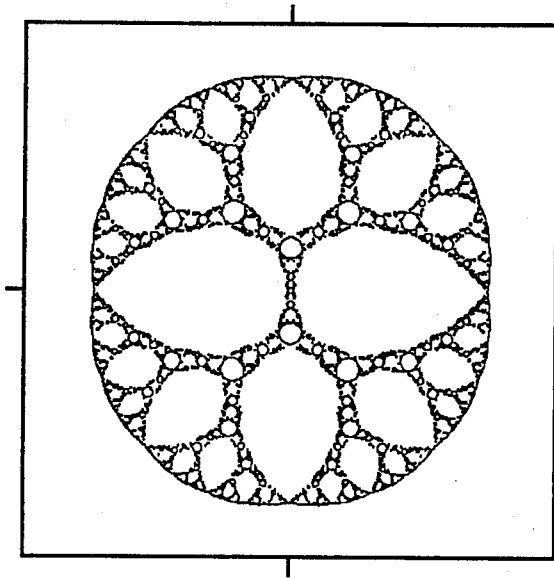


(c) $0,2 \leq \Re(z) \leq 0,8$
 $-0,3 \leq \Im(z) \leq 0,3$

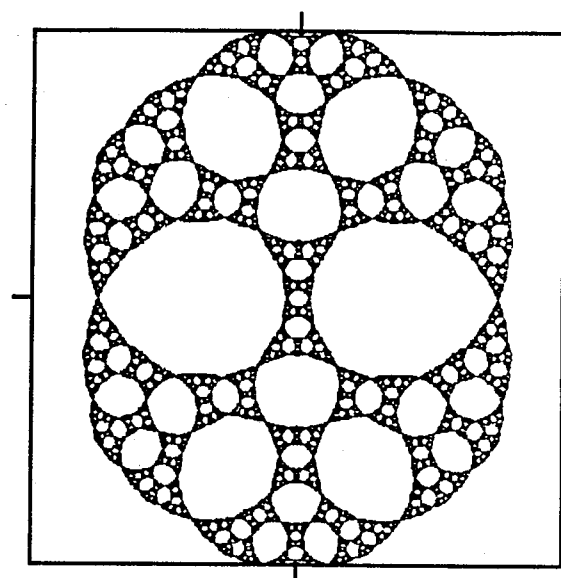


(d) $0,3730 \leq \Re(z) \leq 0,4480$
 $-0,0375 \leq \Im(z) \leq 0,0375$

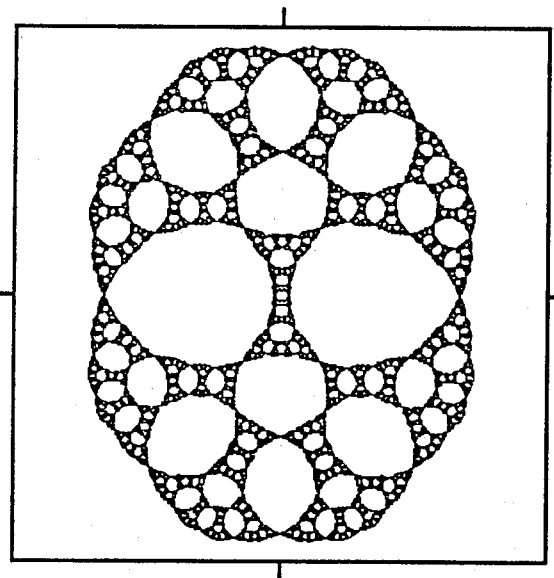
Figure C.3: Ensembles de Julia pour le modèle en diamant ($p = s = 2$), avec $q = 1$:
 (b) et (c) sont des zooms de (a) alors que (d) est un zoom de (c).



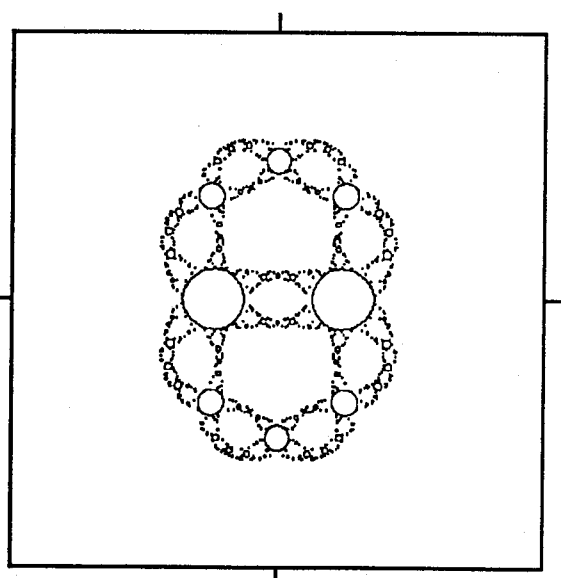
(a) J_R pour $q = 2$; $-12 \leq \Re(z) \leq 12$
 $-12 \leq \Im(z) \leq 12$



(b) J_R pour $q = 2$; $-6 \leq \Re(z) \leq 6$
 $-6 \leq \Im(z) \leq 6$

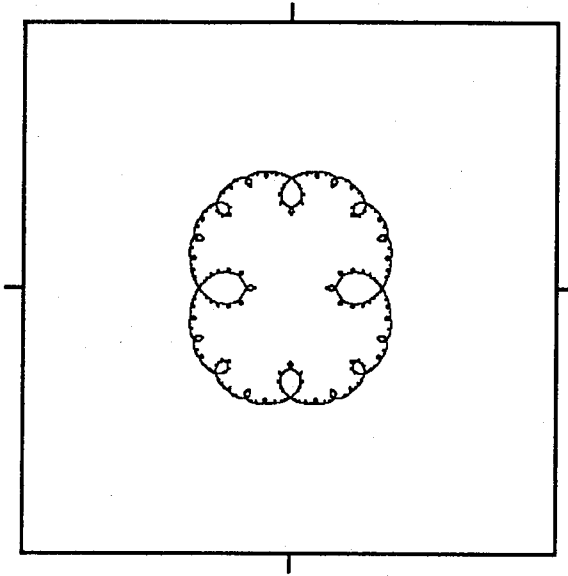


(c) J_R pour $q = 2$; $-8 \leq \Re(z) \leq 8$
 $-8 \leq \Im(z) \leq 8$

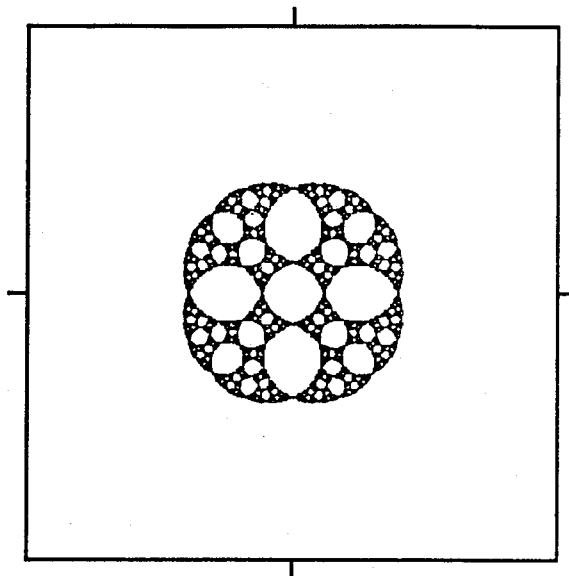


(d) J_R pour $q = 2$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

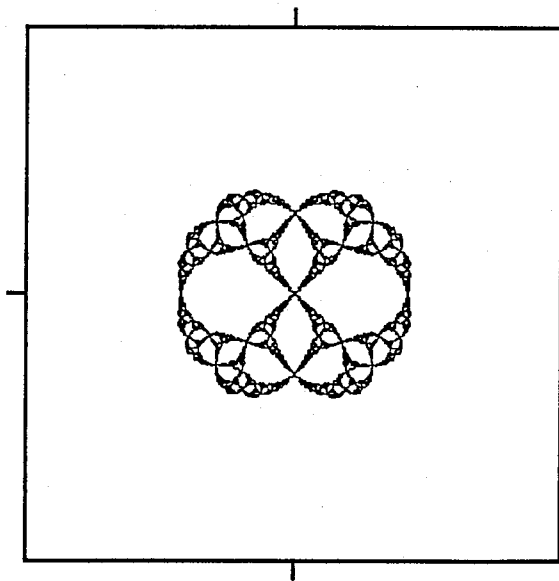
Figure C.4: Ensembles de Julia pour le modèle en diamant avec $q = 2$: (a) R_2 ; (b) R_3 ; (c) R_4 ; (d) R_5 . Les Figures (b) et (c) ont $d = 2$, alors que $d = 1,63$ pour (a) et $d = 3$ pour (d).



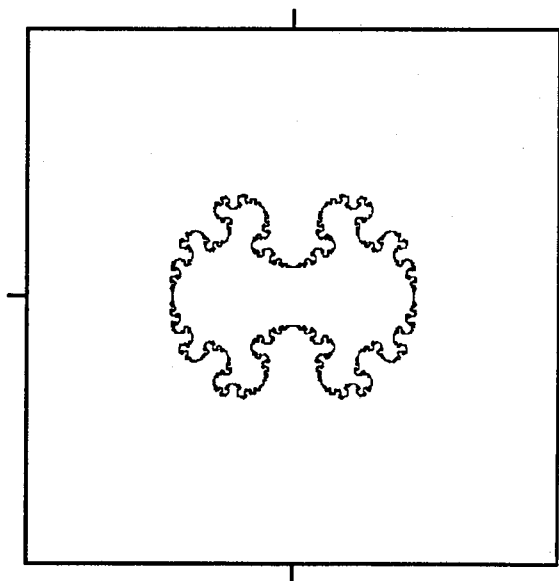
(a) J_R pour $q = 1$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$



(b) J_R pour $q = 2$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

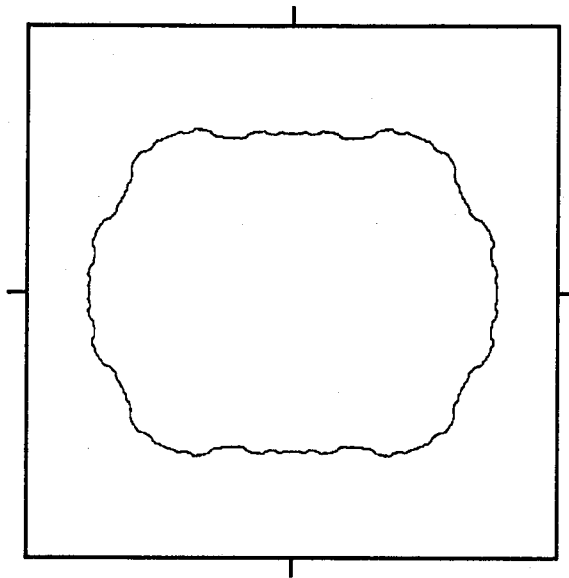


(c) J_R pour $q = 3$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$



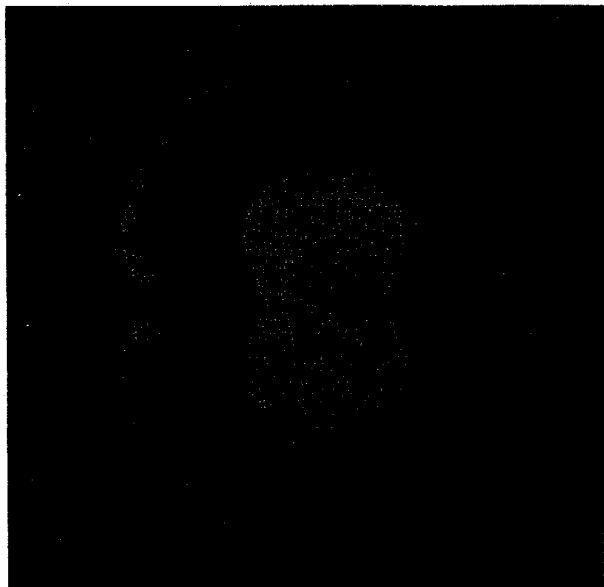
(d) J_R pour $q = 4$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

Figure C.5: Ensembles de Julia pour le modèle en collier ($p = s = 2$), avec différentes valeurs du paramètre q . Ici $b = d = 2$.

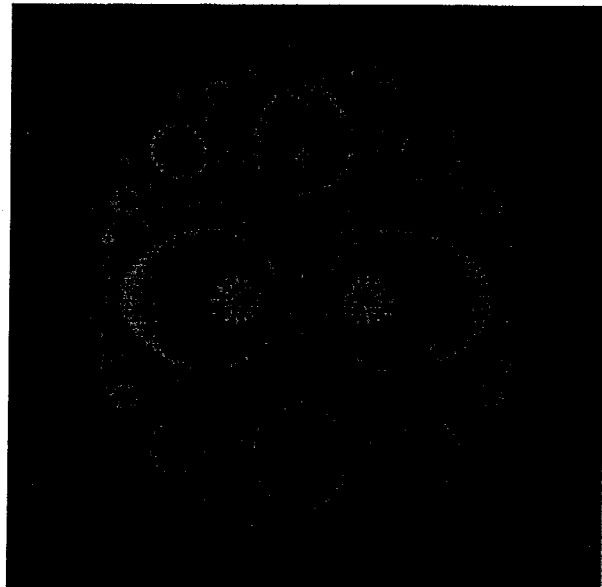


$$J_R \text{ pour } q = 100 \ ; \ -7 \leq \Re(z) \leq 7 \\ -7 \leq \Im(z) \leq 7$$

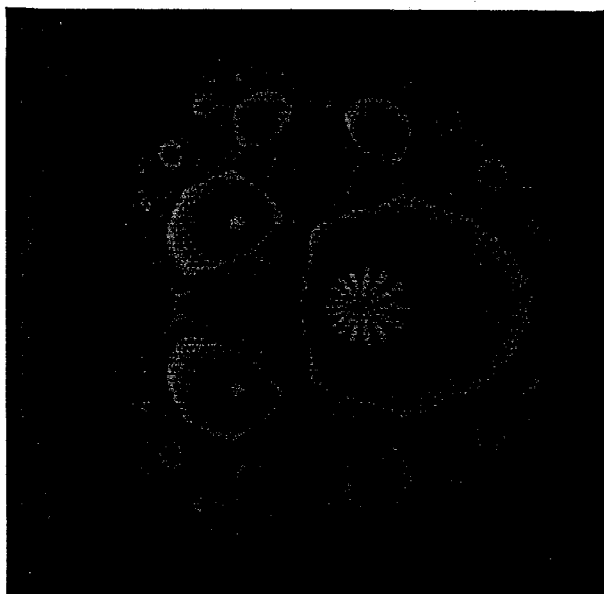
Figure C.6: Ensemble de Julia pour le modèle en collier ($p = s = 2$), avec $q = 100$. Ici $b = d = 2$.



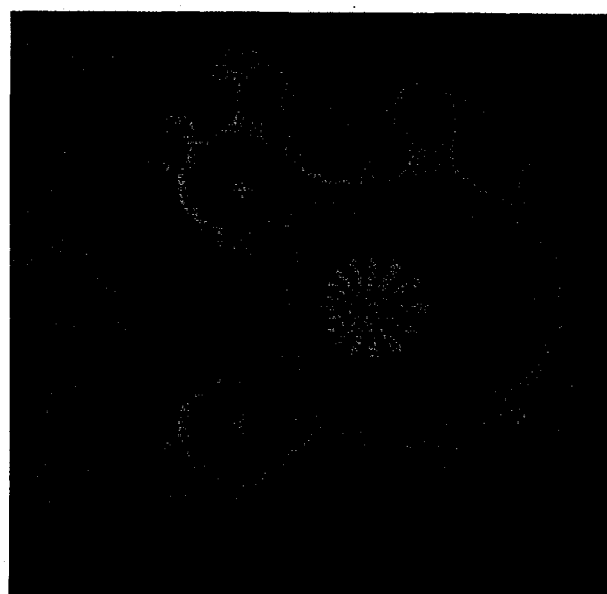
(a) F_R pour $q = 1$; $-6 \leq \Re(z) \leq 4$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$



(b) F_R pour $q = 2$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

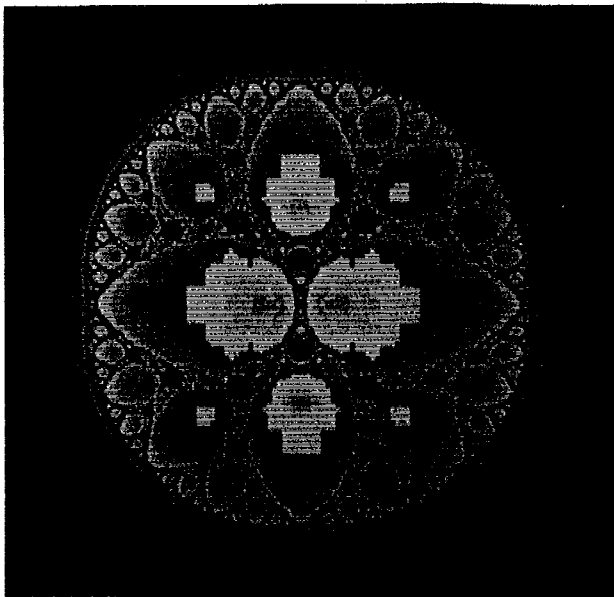


(c) F_R pour $q = 3$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

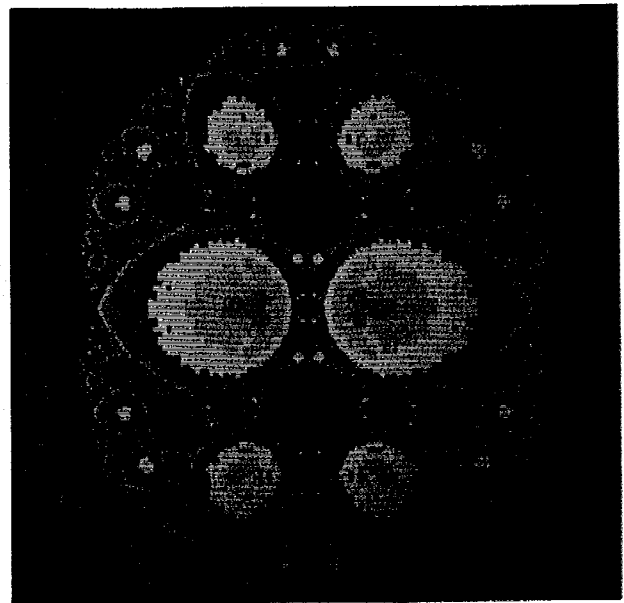


(d) F_R pour $q = 4$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

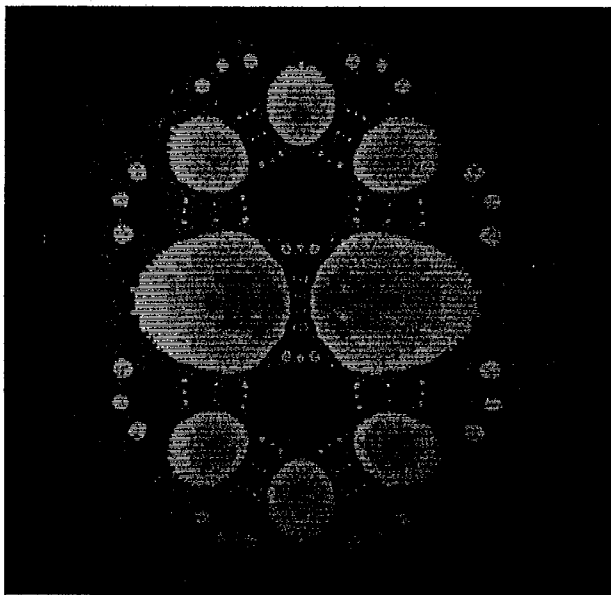
Figure C.7: Ensembles de Fatou pour le modèle en diamant ($p = s = 2$), avec différentes valeurs du paramètre q : $b = d = 2$.



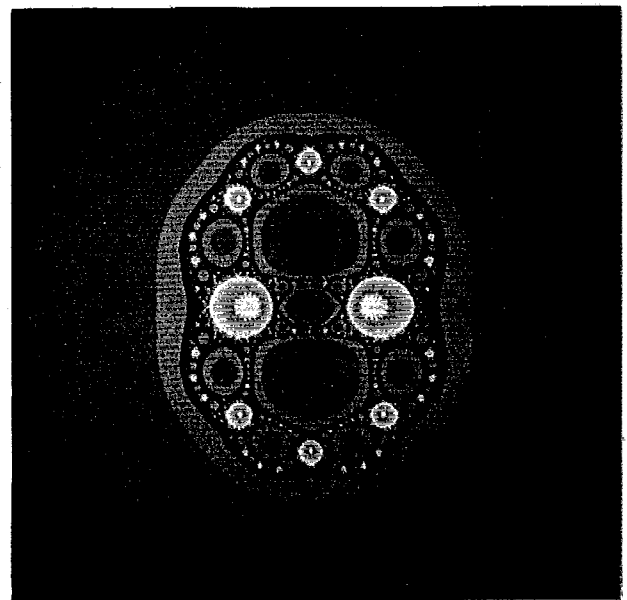
(a) F_R pour $q = 2$; $-12 \leq \Re(z) \leq 12$
 $-12 \leq \Im(z) \leq 12$



(b) F_R pour $q = 2$; $-6 \leq \Re(z) \leq 6$
 $-6 \leq \Im(z) \leq 6$

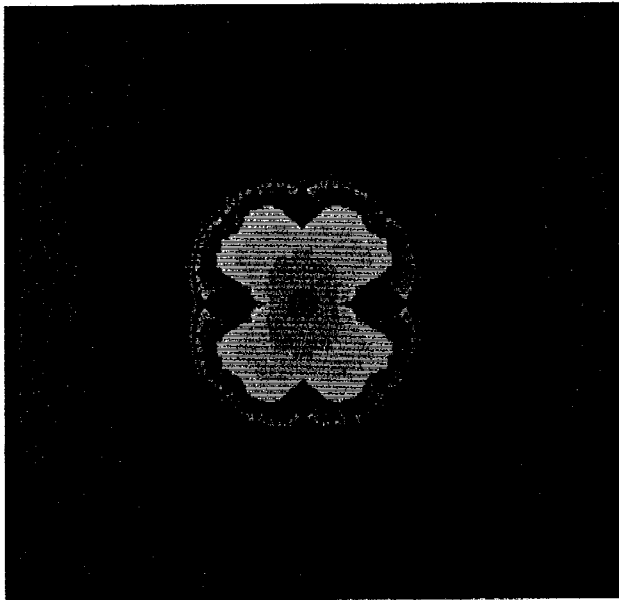


(c) F_R pour $q = 2$; $-8 \leq \Re(z) \leq 8$
 $-8 \leq \Im(z) \leq 8$

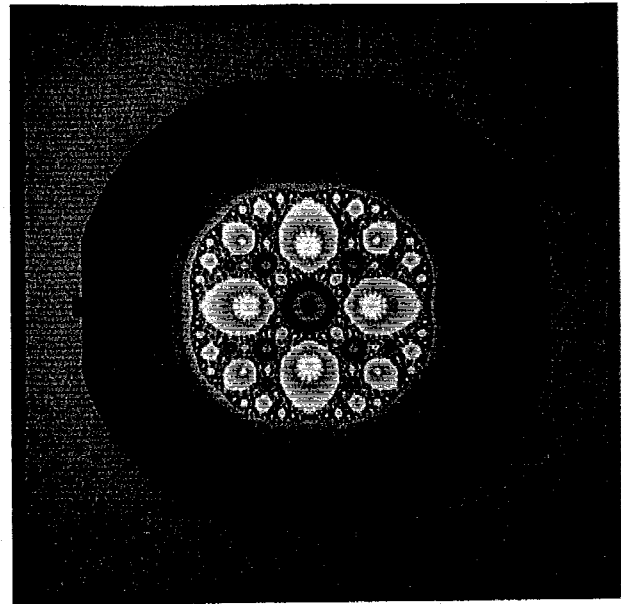


(d) F_R pour $q = 2$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

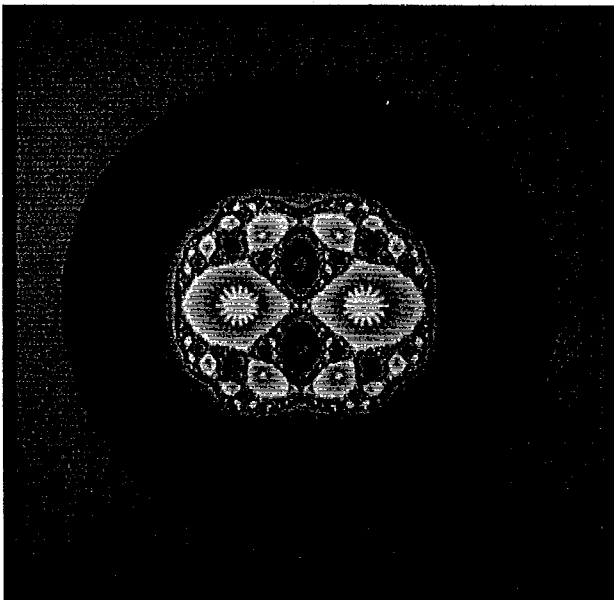
Figure C.8: Ensembles de Fatou pour le modèle en diamant avec $q = 2$: (a) R_2 ; (b) R_3 ; (c) R_4 ; (d) R_5 .



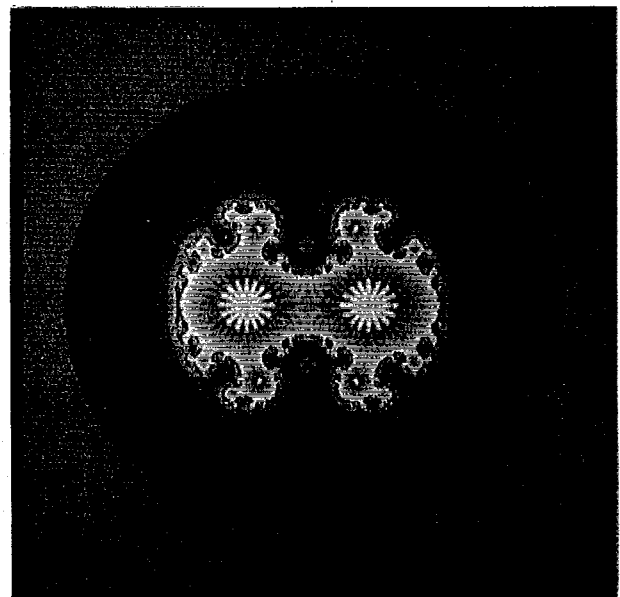
(a) F_R pour $q = 1$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$



(b) F_R pour $q = 2$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

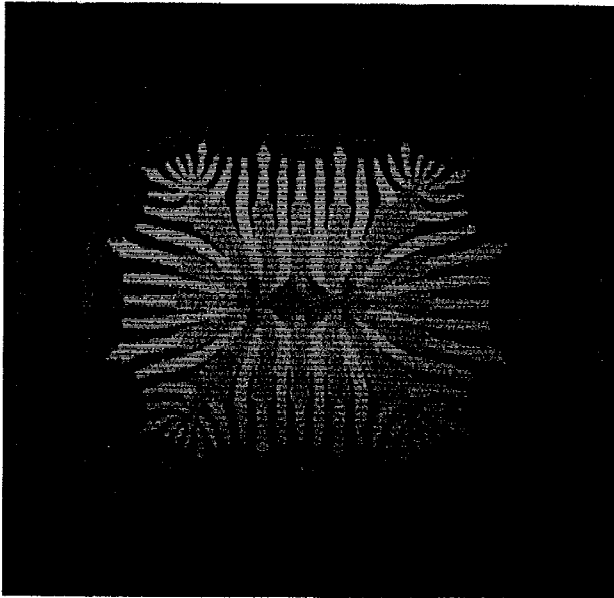


(c) F_R pour $q = 3$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

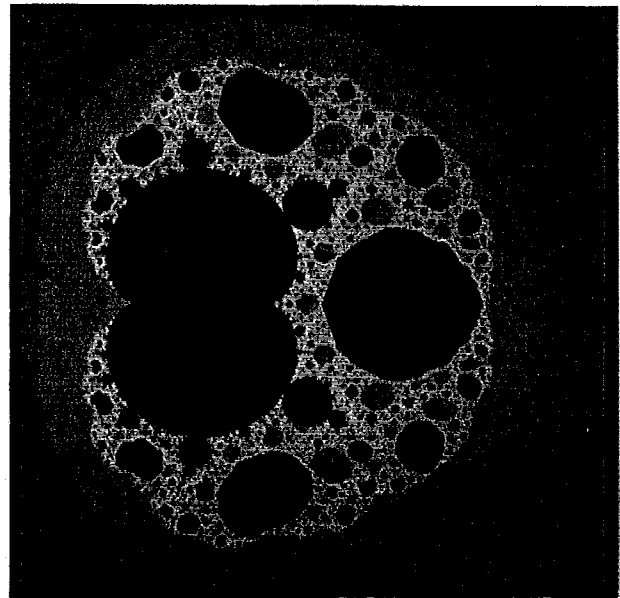


(d) F_R pour $q = 4$; $-5 \leq \Re(z) \leq 5$
 $-5 \leq \Im(z) \leq 5$

Figure C.9: Ensembles de Fatou pour le modèle en collier ($p = s = 2$), avec différentes valeurs du paramètre q .



(a) F_R pour $q = 100$; $-7 \leq \Re(z) \leq 7$
 $-7 \leq \Im(z) \leq 7$



(b) M pour R_1 ; $-1,0 \leq \Re(q) \leq 4,0$
 $-2,5 \leq \Im(q) \leq 2,5$

Figure C.10: (a) Ensemble de Fatou pour le modèle en collier ($p = s = 2$), avec $q = 100$; (b) ensembles de type Mandelbrot pour R_1 du réseau en diamant.

Comme nous venons de le voir, les cartes dynamiques renferment beaucoup d'information sur nos systèmes ¹. Ainsi, on peut facilement y voir si nos transitions sont ferromagnétique-anti-ferromagnétique, ferromagnétique-paramagnétique ou anti-ferromagnétique-paramagnétique. En plus, elles permettent de bien visualiser la dynamique relativement compliquée de $R(z)$, tout en indiquant la phase dans laquelle le système se trouve.

Remarquons que le figure C.10(b) est l'ensemble de type Mandelbrot du modèle en diamant (R_1). Pour plus de détails à son sujet, voir §6.2.3.

¹Il est à noter que certaines des caractéristiques des cartes dynamiques proviennent des programmes utilisés pour les obtenir. Ainsi, certaines des "pétales" des figures précédentes sont dues à la précision des calculs ; une meilleure définition est possible, mais le temps de calcul requis est augmenté de beaucoup.

Bibliographie

- [1] Amit D.J. 1984 , *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* (Singapore: World Scientific)
- [2] Ashcroft N.W., Mermin N.D. 1976 , *Solid State Physics* (Philadelphia: Saunders College)
- [3] Baker G.A. Jr., Graves-Morris P. 1981 , *Padé Approximants. Part I : Basic Theory. Part II : Extensions and Applications.* in "Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 13, 14" (New York: Addison-Wesley)
- [4] Barnsley M. 1988 , *Fractals Everywhere* (London: Academic Press)
- [5] Behnke H., Bachmann F., Fladt K., Süß W. 1987 , *Fundamentals of Mathematics, Vol.III ; Analysis* (Boston: M.I.T. Press)
- [6] Bergé P., Pomeau Y., Vidal Ch. 1984 , *L'Ordre dans le Chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence* (Paris: Herman)
- [7] Berker A.N., Ostlund S., Putnam F.A. 1978 , *J.Phys.B17*, 3650-3665
- [8] Berker A.N., Ostlund S. 1979 , *J.Phys.C12*, 4961-4975
- [9] Blanchard P. 1984 , *Bull.Am.Math.Soc.* **11**, 85-141
- [10] Brolin H. 1965 , *Arkiv för Matematik (Dan.)* **6**, 103-144
- [11] Burkhardt T.W. 1982 , in "Topics in Current Physics" **30** (Berlin: Springer-Verlag), 33-56
- [12] Côté R. 1989 , *Commentaires sur le programme JULDIR* (Rapport technique interne, Université Laval)
- [13] Côté R., d'Anjou M., Dubé L.J. 1989 , *Complex Dynamics of Renormalisation Transformations : I. Hierarchical lattices.* (en rédaction)

- [14] Derrida B., De Seze L., Itzykson C. 1983 , *J.Stat.Phys.* **33**, 559-569
- [15] Derrida B., Flyvbjerg H. 1985 , *J.Phys.A18*, L313-L318
- [16] Derrida B., Itzykson C., Luck J.M. 1984 , *Commun.Math.Phys.* **94**, 115-132
- [17] Devaney R.L. 1987 , *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (New York: Addison-Wesley)
- [18] Fatou P. 1919 , *Bull.Soc.Math.France* **47**, 161-271
- [19] Fatou P. 1920a , *Bull.Soc.Math.France* **48**, 33-94
- [20] Fatou P. 1920b , *Bull.Soc.Math.France* **48**, 208-314
- [21] Fatou P. 1926 , *Acta Math.* **47**, 337-370
- [22] Fisher M.E. 1965 , *Statistical Physics, Weak Interactions, Field Theory*, in "Lectures in Theoretical Physics, Vol. VII C " (Boulder: University of Colorado Press), 1-159
- [23] Griffiths R.B. 1981 , *Physica A106*, 59-69
- [24] Griffiths R.B., Kaufman M. 1982 , *Phys.Rev.B26*, 5022-5032
- [25] Hu B. 1982 , *Phys.Rep.* **91**, 233-295
- [26] Itzykson C., Luck J.M. 1985 , *Critical Phenomena*, in "Progress in Physics, Vol.11" (Boston: Birkhäuser) 45-82
- [27] Julia G. 1918 , *J.Math.* **8**, 47-245
- [28] Kadanoff L.P. 1966 , *Physics* **2**, 263-272
- [29] Kadanoff L.P., Houghton A. 1975 , *Phys.Rev.B11*, 377-386
- [30] Kadanoff L.P. 1976 , *Annals of Phys.* **100**, 359-394
- [31] Kaufman M., Griffiths R.B. 1984 , *Phys.Rev.B30*, 244-249
- [32] Kurtze D.A. 1979 , *Materials Science Center (Cornell) Report No.* 4184
- [33] Le Bellac M. 1988 , *Des phénomènes critiques aux champs de jauge. Une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs* (Paris: InterEditions/Editions du CNRS)

- [34] Lee T.D., Yang C.N. 1952 , *Phys.Rev.* **57**, 410-419
- [35] Ma S.-K. 1982 . *Modern Theory of Critical Phenomena* (Massachusetts: Benjamin/ Cummings)
- [36] Mártin, H.O., Tsallis C. 1981 , *J.Phys.C***14**, 5645-5657
- [37] Melrose J.R. 1983 , *J.Phys.A***16**, 1041-1062
- [38] Melrose J.R. 1983 , *J.Phys.A***16**, 3077-3083
- [39] Migdal A.A. 1976 , *Sov.Phys.-JETP* **42**, 743-746
- [40] Niemeijer Th., van Leeuwen J.M.J. 1976 , in "Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol.6", 425-505
- [41] Nishimori H., Griffiths R.B. 1983 , *J.Math.Phys.* **24**, 2637-2647
- [42] Onsager L. 1944 , *Phys.Rev.* **65**, 117-149
- [43] Ottavi H., Albinet G. 1987 , *J.Phys.A***20**, 2961-2971
- [44] Pathria R.K. 1986 , *Statistical Mechanics* (Oxford: Pergamon Press)
- [45] Peitgen H.-O., Richter P.H. 1984 , in "Lecture Notes in Mathematics **1111**", vol.5, (Berlin: Springer-Verlag), 111-134
- [46] Peitgen H.-O., Richter P.H. 1985 , *Lotka-Volterra-Approach to Cooperation and Competition in Dynamic Systems*, in "Proc. of the 5th Meeting of UNESCO's Working Group on System Theory", 81-102
- [47] Peitgen H.-O., Richter P.H. 1986 , *The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems* (Berlin: Springer-Verlag)
- [48] Reichl L.E. 1987 , *A Modern Course in Statistical Physics* (Austin: University of Texas Press)
- [49] Saupe D. 1987 , *Physica D***28**, 358-370
- [50] Stephenson J., Couzens R. 1984 , *Physica A***129**, 201-210
- [51] Southern B.W., Knežević M. 1987 , *Phys.Rev.***B35**, 5036-5042
- [52] Toda M., Kubo R., Saito N. 1983 , *Statistical Physics I* (Berlin: Springer-Verlag)

- [53] van Saarloos W., Kurtze D.A. 1984 , *J.Phys.A***17**, 1301-1311
- [54] Wilson K.G. 1971a , *Phys.Rev.B***4**, 3174-3183
- [55] Wilson K.G. 1971b , *Phys.Rev.B***4**, 3184-3205
- [56] Wilson K.G., Kogut J. 1974 , *Phys.Rep.* **12**, 75-200
- [57] Wu F.Y. 1982 , *Rev.Mod.Phys.* **54**, 235-268
- [58] Yang C.N., Lee T.D. 1952 , *Phys.Rev.* **57**, 404-409